Tema 1: movimiento oscilatorio

Oscilaciones y Ondas

Fundamentos físicos de la ingeniería

Ingeniería Industrial

Primer Curso

Índice

- Introducción: movimiento oscilatorio
- Representación matemática del MAS
  - Dinámica del MAS
  - Periodo y frecuencia
  - Velocidad y aceleración
- Energía del MAS
- Sistemas oscilantes:
  - Muelle vertical
  - Péndulo simple
  - Péndulo físico
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones Forzadas: resonancia

Movimiento oscilatorio

- Movimiento periódico
- Ejemplos:
  - Barcas sobre el agua
  - Bandera al viento
  - Péndulo de un reloj
  - Moléculas en un sólido
  - V e I en circuitos de corriente alterna
- En general, cualquier objeto desplazado ligeramente de su posición de equilibrio

Movimiento oscilatorio

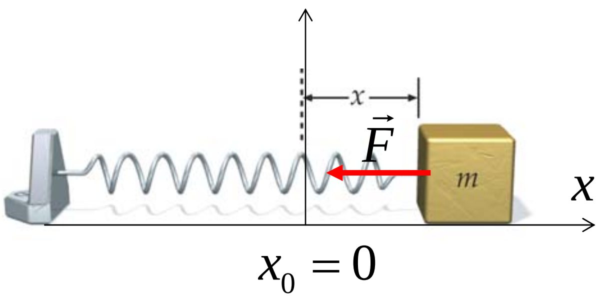
- Forma más básica de movimiento oscilatorio: **movimiento armónico simple** (MAS)
- ¿Por qué estudiar el MAS?
  - Ejemplo de movimiento oscilatorio
  - Aproximación válida en muchos casos de movimiento oscilatorio
  - Componente básico de la ecuación del desplazamiento de movimientos oscilatorios más complejos

Índice

- Introducción: movimiento oscilatorio
- Representación matemática del MAS
  - Dinámica del MAS
  - Periodo y frecuencia
  - Velocidad y aceleración
- Energía del MAS
- Sistemas oscilantes:
  - Muelle vertical
  - Péndulo simple
  - Péndulo físico
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones Forzadas: resonancia

Representación matemática del MAS: dinámica del MAS

- Cuerpo unido a un muelle



$$F = -kx$$

- k : constante del muelle
- Signo: fuerza **restauradora**

- Segunda ley de Newton:

$$F = ma = -kx \longrightarrow \boxed{a = -\frac{kx}{m}}$$

Condición de MAS para la aceleración

Representación matemática del MAS

- Segunda ley de Newton:

$$F = ma = -kx \longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \qquad \text{con: } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

- Solución: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta)}$
  - Comprobación: $\dfrac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$

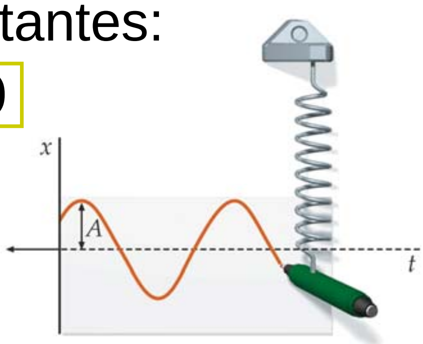
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

Representación matemática del MAS

- Significado físico de las constantes:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta)}$$

  - $A \rightarrow$ Amplitud (m)
  - $\omega \rightarrow$ Frecuencia angular (rad/s)
  - $\delta \rightarrow$ Constante de fase (rad)

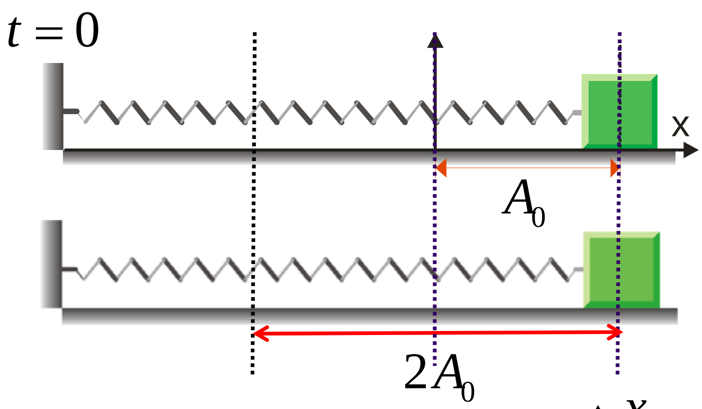


- Determinación de A y δ:

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= A\cos(\delta) \\ v(0) &= -A\omega\,\mathrm{sen}(\delta) \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

Dos ecuaciones con dos incógnitas

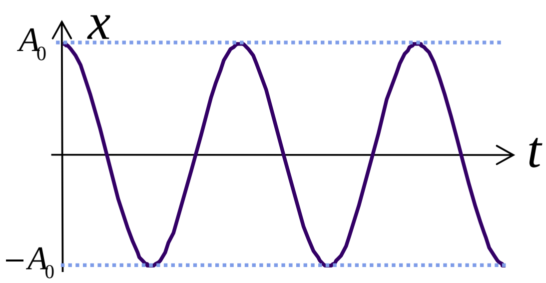
Representación matemática del MAS: Ejemplo



$$x(0) = A\cos(\delta) = A_0$$
$$v(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\delta) = 0$$
$$\Downarrow$$

Solución: $\begin{cases} A = A_0 \\ \delta = 0 \end{cases}$

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t)$$



Representación matemática del MAS: Resumen

- Fuerza que provoca un MAS:

$$\boxed{F = -kx} \rightarrow \text{Ley de Hooke}$$

- Ecuación diferencial del MAS

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

- Ecuación del MAS

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta)}$$

Representación del MAS: periodo y frecuencia

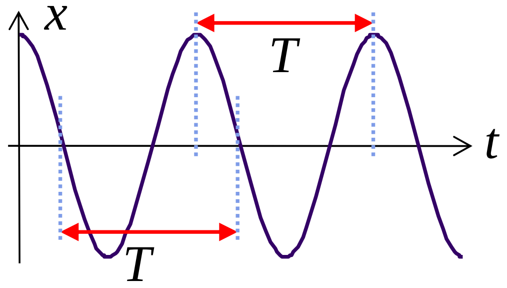
- **Periodo** (T): Tiempo necesario para cumplir un ciclo completo

$$x(t) = x(t+T)$$

$$x(t+T) = A\cos(\omega t + \omega T + \delta) \Longrightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Unidades: segundos



Representación del MAS: periodo y frecuencia

- **Frecuencia** (f): Número de oscilaciones por unidad de tiempo (ciclos por segundo)

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \quad \text{Unidades: } \mathrm{s}^{-1} \equiv \mathrm{Hz}$$

- Para el resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

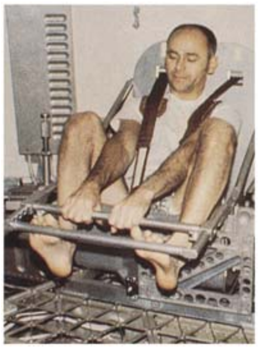
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La frecuencia no depende de la amplitud

Representación del MAS: aplicaciones

- El hecho de que la frecuencia de las oscilaciones del resorte no dependa de la amplitud tiene interesantes aplicaciones:
  - Medida de masas a partir de periodo de oscilación



El astronauta Alan L. Bean midiendo su masa durante el segundo viaje del Skylab (1973)

Representación del MAS: aplicaciones

- El hecho de que la frecuencia de las oscilaciones del resorte no dependan de la amplitud tiene interesantes aplicaciones:
  - Medida de masas a partir de periodo de oscilación
  - Instrumentos musicales: la frecuencia del sonido no depende de la fuerza con que se pulse la cuerda del instrumento o la tecla de un piano.

Representación del MAS: velocidad y aceleración

- Posición: $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$
- Velocidad:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

El signo indica el sentido

$$v_{\max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(para el resorte)}$$

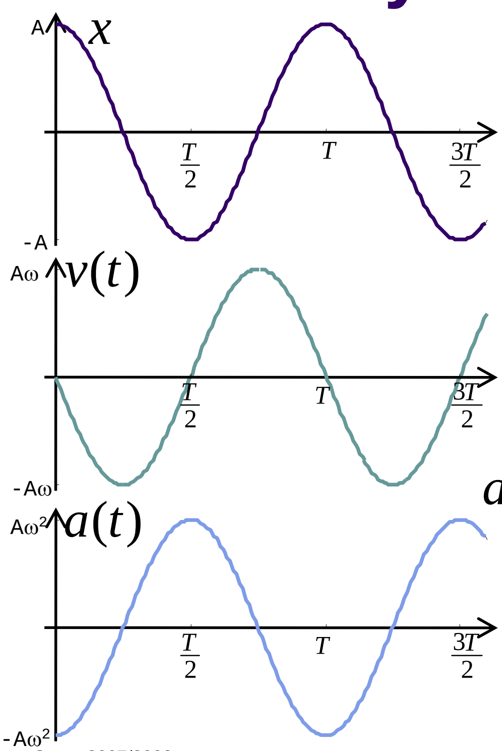
- Aceleración:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$$

El signo indica el sentido

$$a_{\max} = A\omega^2 = A\frac{k}{m} \quad \text{(para el resorte)}$$

Representación del MAS: velocidad y aceleración



$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

- Suponemos δ=0

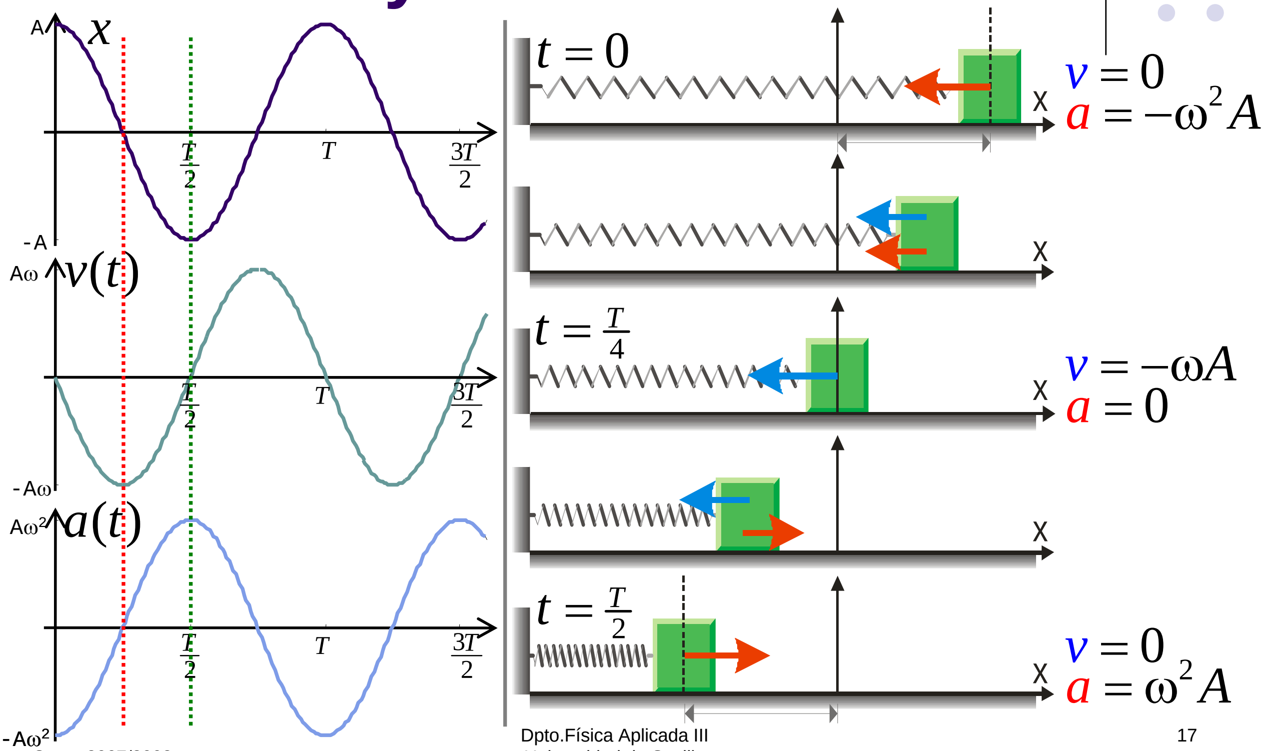
$$v(t) = -A\omega \,\mathrm{sen}(\omega t) = A\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

- Desfase $\pi/2$ con $x(t)$

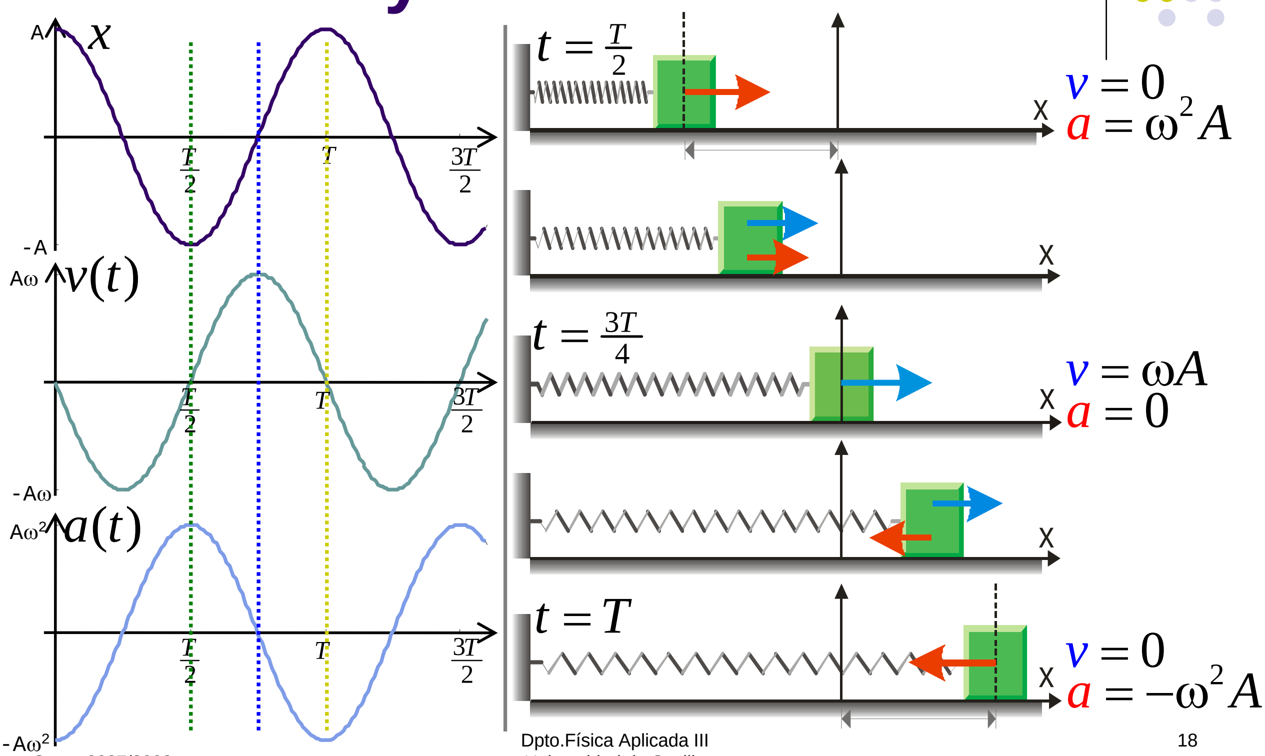
$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) = A\omega^2 \cos(\omega t + \pi)$$

- Desfase $\pi/2$ con $v(t)$
- Desfase π con $x(t)$

Representación del MAS: velocidad y aceleración



Representación del MAS: velocidad y aceleración



Índice

- Introducción: movimiento oscilatorio
- Representación matemática del MAS
  - Dinámica del MAS
  - Periodo y frecuencia
  - Velocidad y aceleración
- Energía del MAS
- Sistemas oscilantes:
  - Muelle vertical
  - Péndulo simple
  - Péndulo físico
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones Forzadas: resonancia

Energía del MAS

- Si no hay rozamiento: energía mecánica constante $\Rightarrow \quad E = E_c + U = \text{cte}$
- Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

- Energía potencial:

$$U(x) - \cancel{U(0)} = -W_{muelle} = -\int_0^x F dx = \int_0^x Kx\, dx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía del MAS

- Energía mecánica:

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{con:} \quad \begin{cases} x(t)=A\cos(\omega t+\delta) \\ v(t)=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\delta) \end{cases}$$

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\delta)+\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

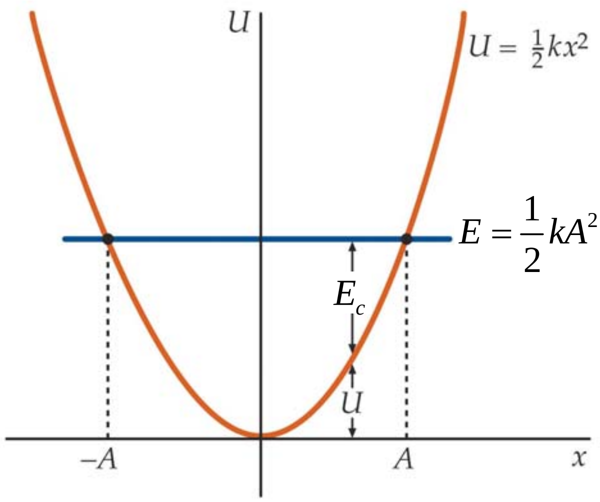
Usando: $m\omega^2=k$ (para un resorte)

$$E=\frac{1}{2}kA^2\underbrace{(\mathrm{sen}^2(\omega t+\delta)+\cos^2(\omega t+\delta))}_{=1}=\frac{1}{2}kA^2$$

Energía del MAS

$$\boxed{E=\frac{1}{2}kA^2}$$

¡ No depende de la masa !



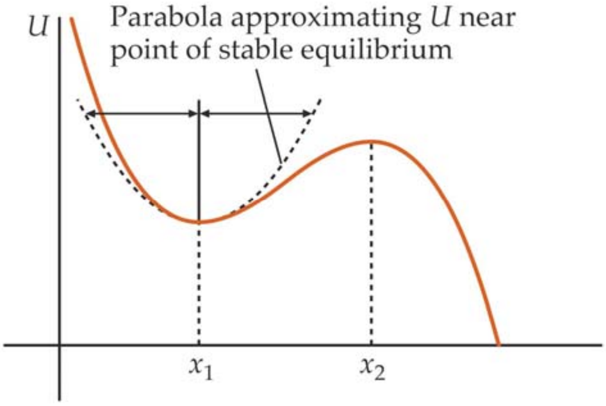
- La energía se trasvasa continuamente de cinética a potencial y viceversa

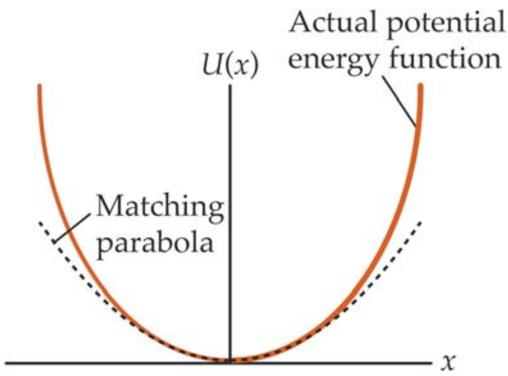
$$x=\pm A\rightarrow E=U_{\max}=\frac{1}{2}kA^2$$

$$x=0\rightarrow E=E_{c,\max}=\frac{1}{2}mv^2_{\max}=\frac{1}{2}kA^2$$

Energía del MAS

- Cualquier partícula que se desplaza ligeramente de su equilibrio sufre un MAS ya que cualquier curva puede aproximarse cerca del mínimo con una parábola:

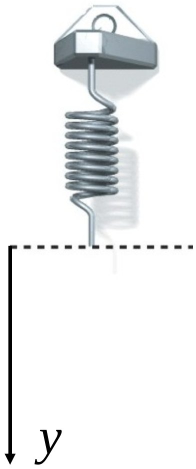




U(x) para una partícula en el fondo de un cuenco esférico

Índice

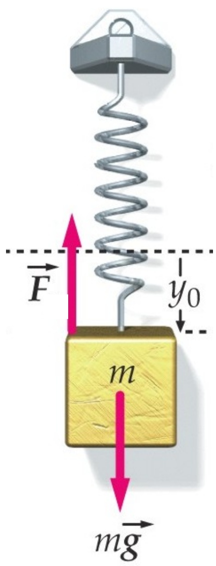
Sistemas oscilantes: muelle vertical



- Supongamos muelle vertical
- Definimos eje y hacia abajo
- Fuerza del muelle

$$\vec{F} = -ky\vec{u}_y$$

Sistemas oscilantes: muelle vertical



- Añadimos una masa m
- Aparece una fuerza adicional, el peso:

$$\vec{P} = mg\vec{u}_y$$

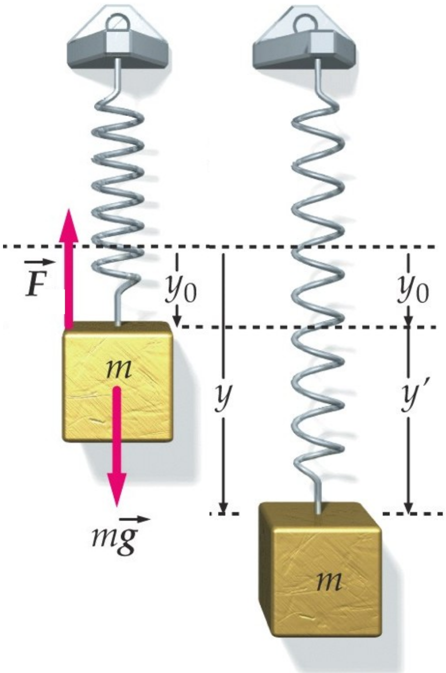
- Se puede hallar el alargamiento del muelle (y_0):

Condición de equilibrio: $\vec{F} + \vec{P} = 0$

$$mg = ky_0$$

$$\boxed{y_0 = \frac{mg}{k}} \rightarrow \boxed{\text{Puede usarse para medir } k}$$

Sistemas oscilantes: muelle vertical



- Hacemos oscilar el sistema:

$$mg - ky = ma$$

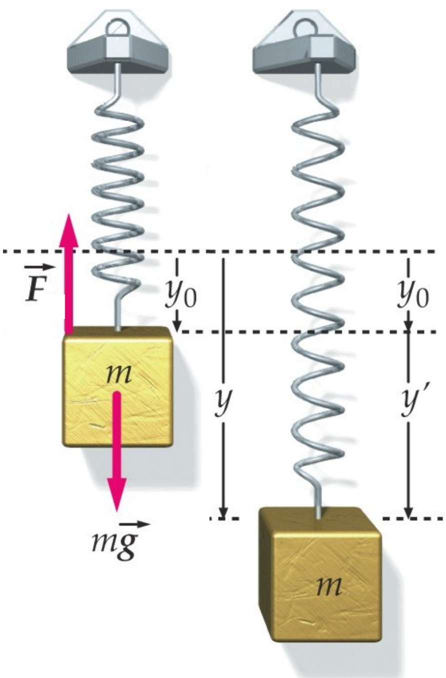
- Definimos: $y' = y - y_0$

$$y = y' + y_0 = y' + \frac{mg}{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} mg - ky = -ky' \\ ma = m\dfrac{d^2y}{dt^2} = m\dfrac{d^2y'}{dt^2} \end{array} \right.$$

$$\boxed{m\frac{d^2y'}{dt^2} = -ky'}$$

Sistemas oscilantes: muelle vertical



$$\boxed{\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y'}$$

Ecuación diferencial de un MAS

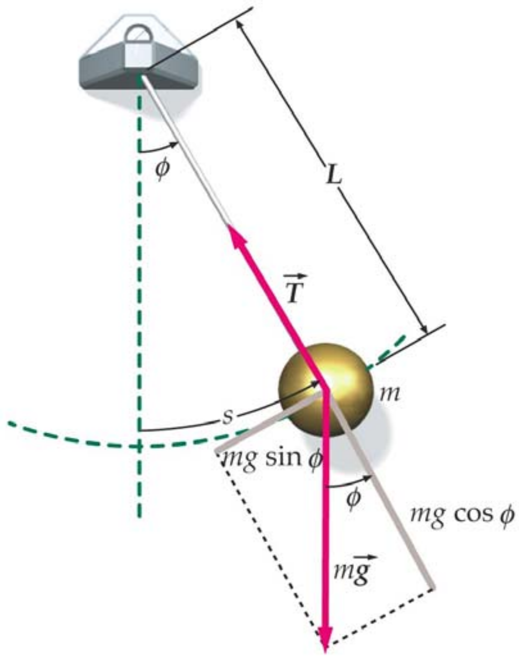
Solución: $y' = A\cos(\omega t + \delta)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El único efecto de *m* es desplazar la posición de equilibrio

Índice

Sistemas oscilantes: péndulo simple

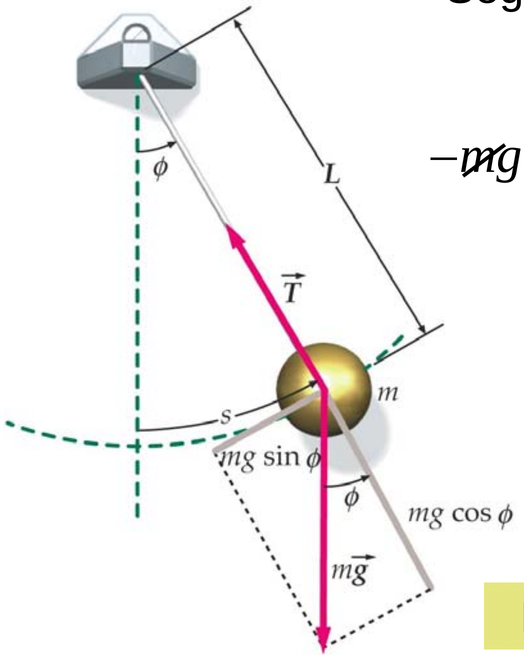


- Objeto de masa m
- Suspendido de una cuerda ligera ($m_c << m$) de longitud L
- Extremo superior fijo

⇩

- Si lo desplazamos del equilibrio y lo soltamos: **oscilaciones**
- ¿Es un M.A.S.?

Sistemas oscilantes: péndulo simple



Segunda Ley de Newton:

$$-mg \operatorname{sen} \phi = ma$$

$$-\cancel{m}g \operatorname{sen} \phi = \cancel{m}\frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{usando: } s = L\phi$$

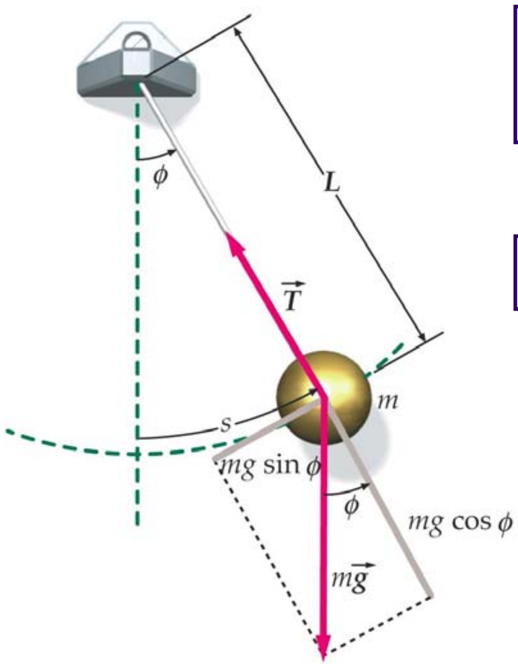
$$-g \operatorname{sen} \phi = L\frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$\text{Si } \phi \ll \;\Rightarrow \operatorname{sen} \phi \approx \phi$$

$$\boxed{\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\phi}$$

Ecuación diferencial de un MAS

Sistemas oscilantes: péndulo simple



$$\boxed{\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\phi}$$

Solución:

$$\boxed{\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)} \text{ con: } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Periodo del péndulo simple:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

¡ T no depende de m !

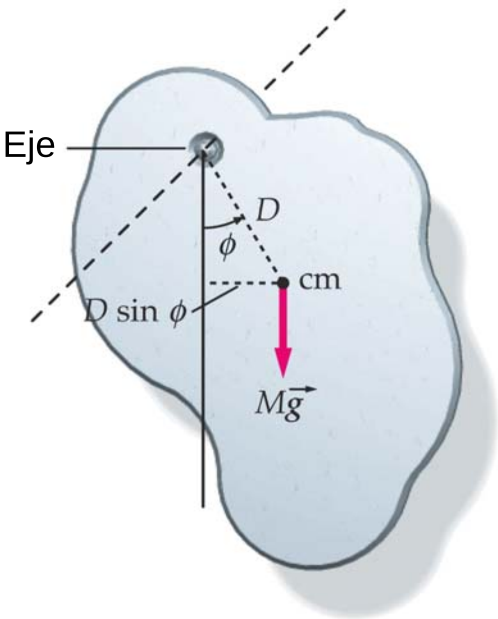
¡ T no depende de ϕ_0 !

Péndulo simple: aplicaciones

- El hecho de que el periodo de oscilación de un péndulo simple no dependa de la masa ni de la amplitud (para amplitudes pequeñas) resulta llamativo y tiene interesantes aplicaciones:
  - Técnica sencilla para calcular la aceleración de la gravedad.
  - Medida del tiempo: péndulo de un reloj

Índice

Sistemas oscilantes: péndulo físico

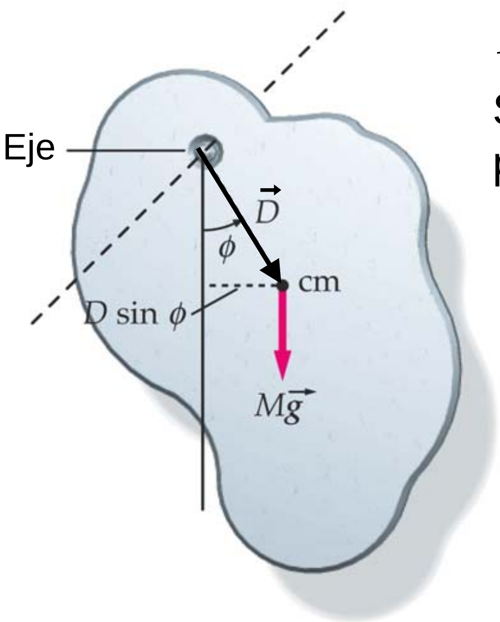


- Objeto rígido de masa m
- Oscila alrededor de un eje fijo

$$\Downarrow$$

- Si lo desplazamos del equilibrio y lo soltamos: **oscilaciones**
- ¿Es un M.A.S.?

Sistemas oscilantes: péndulo físico



$$\vec{M} = \vec{D} \times \vec{P} \longrightarrow M = mgD \,\mathrm{sen}\,\phi$$

Segunda Ley de Newton para una rotación:

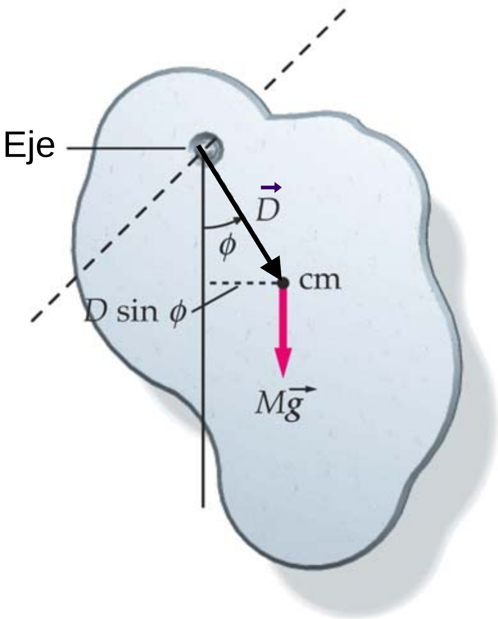
$$\sum M_i = I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mgD\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\text{Si } \phi \ll \;\Rightarrow \mathrm{sen}\,\phi \approx \phi$$

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{mgD}{I}\phi}$$

Ecuación diferencial de un MAS

Sistemas oscilantes: péndulo físico



$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{mgD}{I}\phi}$$

Solución:

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta) \text{ con: } \omega = \sqrt{\frac{mgD}{I}}$$

Periodo del péndulo simple:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgD}}$$

- Puede usarse para medir I
- Si $I=mD^2$: T del pendulo simple

Índice

Oscilaciones amortiguadas

- Las oscilaciones en sistemas oscilantes reales no son permanentes: rozamiento
- Este efecto puede incluirse en los cálculos:

Fuerza resistiva: $R = -bv$ con: $\begin{cases} b \rightarrow \text{constante} \\ v \rightarrow \text{velocidad} \end{cases}$

Amortiguamiento lineal (muy habitual)

- Segunda Ley de Newton:

$$-kx - bv = ma \quad \rightarrow \quad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Oscilaciones amortiguadas

Ecuación: $$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Solución: $$\boxed{x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \delta)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

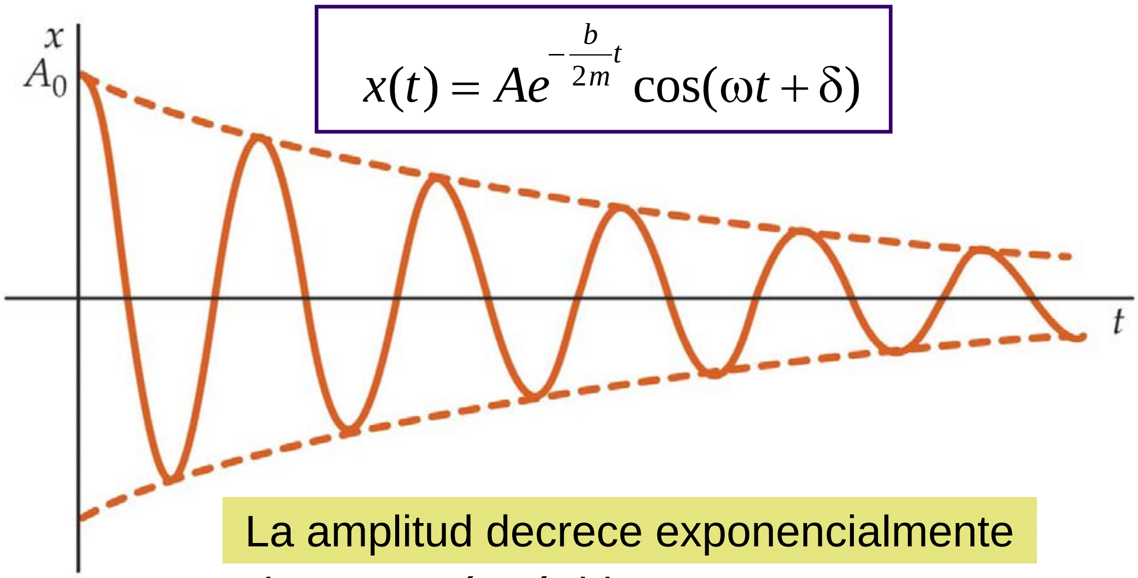
$$\omega \leq \omega_0$$

Frecuencia natural (corresponde a b=0)

El sistema oscila con frecuencia menor que si no hubiera rozamiento (b=0)

Oscilaciones amortiguadas

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \delta)$$



La amplitud decrece exponencialmente

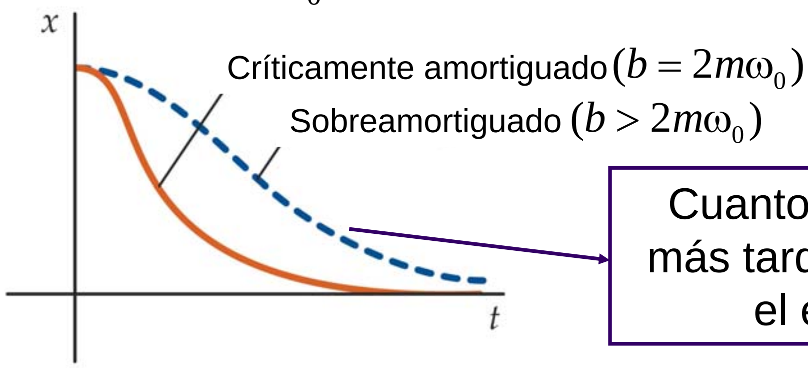
decrece más rápido cuanto mayor es b

Oscilaciones amortiguadas

- La solución propuesta es válida para $b < 2m\omega_0$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \in \mathbb{R}$$ **Sistema subamortiguado**

- Si $b \geq 2m\omega_0$: el sistema no oscila



Cuanto mayor sea b
más tarda en alcanzar
el equilibrio

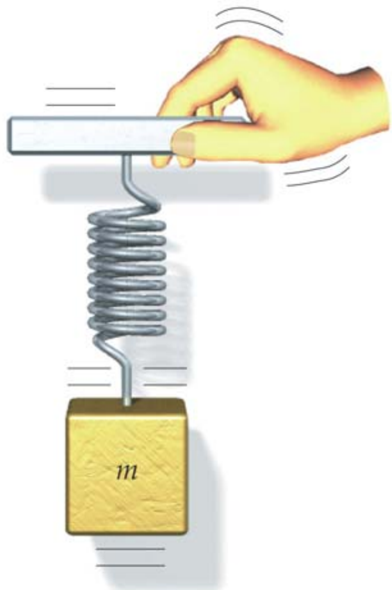
Índice

- Introducción: movimiento oscilatorio
- Representación matemática del MAS
  - Dinámica del MAS
  - Periodo y frecuencia
  - Velocidad y aceleración
- Energía del MAS
- Sistemas oscilantes:
  - Muelle vertical
  - Péndulo simple
  - Péndulo físico
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones Forzadas: resonancia

Oscilaciones forzadas

- En un sistema amortiguado la energía decrece con el tiempo
- Para mantener las oscilaciones es preciso suministrar energía de forma continua
- Esto precisa la acción de una **fuerza externa**

$$F = F_0 \cos(\omega_e t)$$



Oscilaciones forzadas: resonancia

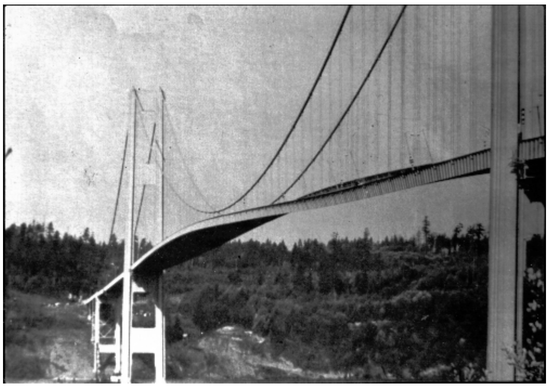
- Movimiento del oscilador forzado:
  - Estado inicial transitorio
  - Estado estacionario:
    - Oscila con ω_e y $A(\omega_e)$
    - Energía es constante (suministrada=disipada)
- **Resonancia**: ocurre cuando $\omega_e \approx \omega_0$

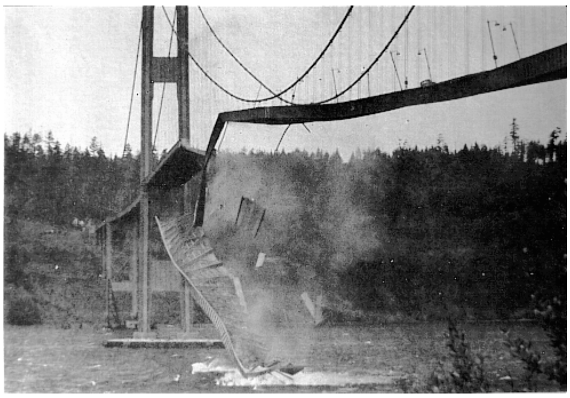
El sistema oscila con amplitud y energía máximas

Resonancia: ejemplo Puente de Tacoma Narrows

• El 7 de noviembre de 1940, se derrumbó el puente colgante de Tacoma Narrows (Washington, USA) debido a las vibraciones provocadas por el viento.

• El puente llevaba abierto al tráfico unos pocos meses.





Resonancia: ejemplo
Puente de Tacoma Narrows

Resonancia: ejemplo
Bahía de Fundy

- La bahía de Fundy se conoce por registrar la máxima diferencia en el nivel del agua entre la marea alta y la bajamar (alrededor de 17 metros).
- Se cree que el nombre “Fundy” data del siglo XVI, cuando exploradores portugueses llamaron a la bahía "Rio Fundo“ (río profundo).
- El folklore popular afirma que las mareas son causadas por una ballena gigante que chapotea en el agua.
- Los oceanógrafos atribuyen el fenómeno a la **resonancia**, como resultado de la coincidencia entre el tiempo que necesita una gran ola para penetrar hasta el fondo de la bahía y regresar y el tiempo entre mareas altas (12.4 horas).

Resonancia: ejemplo Bahía de Fundy




Resumen del tema

- El MAS tiene lugar cuando una partícula está sometida a una fuerza restauradora de valor proporcional al desplazamiento desde el equilibrio.
- La posición de una partícula que experimenta un MAS varia con el tiempo de forma sinusoidal
- La energía total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento.
- Las oscilaciones amortiguadas tienen lugar en un sistema en que hay una fuerza resistiva que se opone al movimiento del cuerpo oscilante.
- Para compensar la disminución de energía con el tiempo en un oscilador amortiguado debe emplearse una fuerza externa: oscilaciones forzadas.
- Cuando la frecuencia de la fuerza externa es similar a la frecuencia natural del oscilador no amortiguado la amplitud de las oscilaciones es máxima: resonancia