

## Prólogo

Nuestra forma habitual de vida queda enmarcada, hoy en día, por la *cultura* de la comunicación. En todos los procesos de comunicación que se nos ocurren juegan un papel capital las ondas, sean sonoras, luminosas o de radio. Esta motivación, llamemos externa, no es la única desde el punto de vista de la formación en física básica. Una de las cuestiones fundamentales a las que debe responder cualquier modelo físico corresponde a cómo describir los *estados* del sistema objeto de estudio; esta descripción se da, de forma extrema, mediante *partículas* o mediante *ondas*. La elección entre ambas descripciones se realiza en función de la posibilidad o no de *localizar* el sistema; así, la descripción ondulatoria es adecuada para, por ejemplo, el estudio del movimiento de la superficie del agua o de la propagación de la luz. Al finalizar el primer cuarto de nuestro siglo hubo que aceptar que ambas descripciones, tan aparentemente contrapuestas, eran complementarias para una descripción adecuada del comportamiento microscópico.

El objetivo de este libro es introducir al lector en el estudio de las oscilaciones y las ondas. Como el tipo de lector que esperamos es el de estudiante de primer año de universidad de una carrera científico-técnica, nos hemos apoyado en aquellos conocimientos que se le suponen. Así suponemos que lo que debe saber de ondas, de su formación propedéutica, lo sabe; la misma hipótesis en lo que se refiere a sus conocimientos matemáticos. Algunos de los conocimientos matemáticos empleados en el libro los aprende el estudiante en el mismo curso, pero sabemos de la imposibilidad de simultanear ese aprendizaje con las necesidades de diversas asignaturas; los autores entienden que los elementos matemáticos que se van introduciendo, derivación parcial, exponencial compleja o las ecuaciones diferenciales lineales por ejemplo, no causan problemas de comprensión.

Los tres primeros capítulos están dedicados a oscilaciones y se ha optado por un lenguaje mecánico estableciendo posteriormente analogías eléctricas. No hemos introducido los osciladores acoplados como paso natural hacia las ondas, por lo que se da un salto en el vacío entre las oscilaciones y las ondas, sólo cubierto por algún ejemplo. Tras una introducción formal, en el capítulo cuarto, se pasa a describir ondas en una cuerda elástica, ondas acústicas y ondas electromagnéticas en los tres siguientes. Nos hemos limitado a casos que puedan tratarse como unidimensionales. Las ecuaciones de Maxwell, que nos llevan a las ondas electromagnéticas, las hemos tratado tanto en forma integral como diferencial, para que el estudiante elija según su preparación; si puede, no vendrá mal la doble lectura. Tras el breve capítulo dedicado a las ondas estacionarias, viene uno dedicado a la superposición de ondas y configuración de paquetes; algo más extenso de lo habitual pues entendemos fundamental su contenido y que no hay porqué posponerlo; sumar funciones sinusoidales está en las posibilidades de todos los estudiantes con un ordenador a su alcance. Los fenómenos típicamente ondulatorios de interferencia y difracción cierran el libro presentándose de una forma totalmente limitada.

Se han intercalado algunos problemas desarrollados como *ejemplos* y otros propuestos como *ejercicios*, con respuesta, que no pretenden ser exhaustivos, ni mucho menos, pero que esperamos puedan ayudar a una mejor comprensión de los temas planteados o iniciar inquietudes para profundizar en ellos.

Estaríamos encantados de recibir cuantos comentarios y críticas se nos quieran hacer para mejorar la calidad y la utilidad del libro. Sería provechoso en nuestra actividad docente y, si Edicions UPC lo cree conveniente, para una posterior edición.

Barcelona, septiembre de 1994

Los autores

## Índice

### 1 Oscilaciones libres

1.1	Introducción	13
1.2	Movimiento armónico simple	13
1.3	Exponenciales complejos	18
1.4	Condiciones iniciales	21
1.5	Energía de un oscilador armónico	23
1.6	Oscilador mecánico	31
1.7	Un oscilador molecular	32
1.8	Oscilador eléctrico	40
1.9	Péndulo simple	41

### 2 Oscilaciones libres amortiguadas

2.1	Oscilador armónico amortiguado	45
2.2	Amortiguamiento débil	46
2.3	Casos sobreamortiguado y crítico	
	2.3.1 Caso sobreamortiguado	50
	2.3.2 Amortiguamiento crítico	50
2.4	Energía de un oscilador débilmente amortiguado	55
2.5	Circuito <i>RLC</i>	62

### 3 Oscilaciones forzadas

3.1	Introducción. Principio de superposición: excitación armónica	65
3.2	Regímenes transitorio y permanente	65
3.3	Amplitud de la respuesta	68
3.4	Estudio de la fase	69
3.5	Impedancia de un oscilador	72
3.6	Intercambios de energía en un oscilador forzado	73
3.7	Estudio de la potencia absorbida en función de la frecuencia. Resonancia	74

## 4 Fenómenos ondulatorios

4.1	Descripción de una onda. Ecuación de onda unidimensional. Medios lineales: superposición de ondas.	83
4.2	Ondas armónicas: notación compleja	86
4.3	Fase y velocidad de fase	87
4.4	Ondas en el espacio	
4.4.1	Ondas planas	88
4.4.2	Ondas esféricas	90
4.5	Tipos de ondas	92

## 5 Ondas transversales progresivas en una cuerda

5.1	Ecuación de onda	93
5.2	Impedancia característica	95
5.3	Potencia suministrada a la cuerda	95
5.4	Cambio de medio de propagación. Transmisión y reflexión de una onda progresiva	99
5.5	Transmisión y reflexión de la energía de una onda progresiva	101

## 6 Ondas acústicas

6.1	Ondas longitudinales en un medio elástico lineal	107
6.2	Impedancia. Intensidad	110
6.3	Reflexión de una onda de presión	111
6.4	Ondas sonoras. Velocidad de fase del sonido	114
6.5	Audición. Nivel de intensidad	114

## 7 Ondas electromagnéticas

7.1	Ondas electromagnéticas en el vacío	117
7.2	Ondas electromagnéticas planas polarizadas en el vacío	119
7.3	Desde las ecuaciones de Maxwell en forma integral	122
7.4	Energía de una onda electromagnética. Vector de Poynting	127
7.5	Cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas. Presión de radiación	128
7.6	Propagación de ondas electromagnéticas en un medio dieléctrico. Índice de refracción	130
7.7	Ondas electromagnéticas en un medio conductor	132

## 8 Ondas estacionarias

8.1	Ondas estacionarias unidimensionales	137
8.2	Ondas en medios limitados	138
8.3	Energía en la ondas estacionarias	139

**9 Superposición de ondas. Paquetes de ondas**

9.1	Introducción	145
9.2	Superposición de dos ondas armónicas que difieren en fase	
	9.2.1 Caso en que las dos ondas tengan la misma amplitud, $A_1 = A_2 = A$	145
	9.2.2 Caso en que las dos ondas tengan distinta amplitud, $A \neq B$	146
	9.2.3 Caso particular: superposición de dos ondas armónicas con distinta frecuencia	146
9.3	Superposición de $N$ ondas armónicas que difieren en fase	149
9.4	Superposición de $N$ ondas armónicas con distinta frecuencia	151
9.5	Velocidades de fase y de grupo. Relación de dispersión	152
9.6	Incertidumbre en la definición de un paquete de ondas	153

**10 Interferencia y difracción**

10.1	Introducción	161
10.2	Interferencia de dos ondas: diagrama de fasores	161
10.3	Interferencia de ondas procedentes de $N$ fuentes igualmente espaciadas	166
10.4	Difracción por una rendija	167

# 1 Oscilaciones libres

## 1.1 Introducción

Muchos fenómenos habituales son periódicos, los latidos del corazón de las personas, el movimiento del péndulo de un reloj de pared o las vibraciones de una cuerda de guitarra, por ejemplo. A escala microscópica, los iones de un cristal de NaCl oscilan alrededor de su posición de equilibrio, o también los átomos en una molécula. En los circuitos eléctricos de una instalación doméstica, la tensión y la corriente varían periódicamente con el tiempo. Tal variedad de fenómenos hace que el estudio de este tipo de movimiento sea importante.

## 1.2 Movimiento armónico simple

La forma más simple de un movimiento periódico viene dada por un sistema físico constituido por una masa sujeta al extremo de un muelle. Supondremos que la masa del muelle es despreciable y que todo el sistema está montado sobre una superficie horizontal sin rozamiento, de tal manera que la masa  $m$  puede deslizarse libremente sobre ella. El muelle, cuando se deja libre, tiene una longitud natural para la que no ejerce ninguna fuerza sobre  $m$ , es la llamada posición de equilibrio. Si movemos la masa estirando o comprimiendo el muelle, éste ejerce una fuerza sobre  $m$  que tiende a devolver, a restaurar, la posición de equilibrio. Si el muelle es elástico, es decir obedece la ley de Hooke, la fuerza restauradora será lineal y puede escribirse

$$\mathbf{F} = -kx \mathbf{i}$$

donde la coordenada  $x$  corresponde a la deformación del muelle y debe, por lo tanto, medirse desde la posición de equilibrio. La constante de proporcionalidad  $k$  se denomina constante elástica del muelle. El signo menos aparece porque el vector fuerza es opuesto en dirección al vector desplazamiento  $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ . En la figura 1.1 se muestra la posición de equilibrio (a), una posición con el muelle comprimido (b) y una tercera con el muelle estirado (c); a la derecha se han representado los diagramas de las fuerzas exteriores que actúan sobre  $m$  en las tres situaciones. Como la superficie horizontal impide el movimiento vertical, no hay aceleración vertical y por lo tanto  $m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0$ . Como el movimiento ocurrirá según la dirección  $x$ , no es preciso mantener la notación vectorial. La fuerza  $F = -kx$  actuando sobre  $m$  hará que tenga una aceleración que, según la segunda ley de Newton, cumplirá

$$-kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.1.a)$$

que reordenamos como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.1b)$$

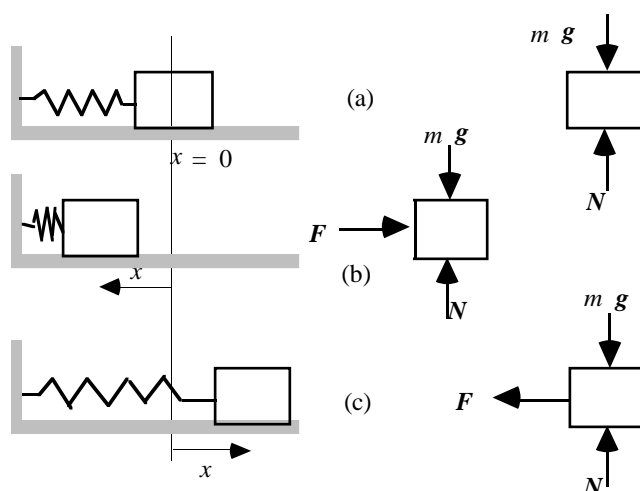


Fig. 1.1

La ecuación 1.1.b constituye un ejemplo de lo que se denomina ecuación diferencial, ya que envuelve derivadas. Las soluciones de esta ecuación son funciones  $x(t)$  que satisfacen dicha ecuación. Las funciones del tiempo,  $x(t)$ , deben ser tales que derivando dos veces debe dar por resultado la misma función multiplicada por  $-k/m$ , como se pone de manifiesto en la ecuación 1.1.a. Una función seno o coseno del tiempo satisfará esa condición. Probemos la función

$$x(t) = a \operatorname{sen} \omega t \quad (1.2)$$

donde  $a$  y  $\omega$  son constantes desconocidas, de momento; su derivada segunda es

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (a \operatorname{sen} \omega t) = -\omega^2 a \operatorname{sen} \omega t$$

así pues,  $x(t) = a \operatorname{sen} \omega t$  es solución de la ecuación 1.1.a, siempre que

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.3)$$

Obviamente una función coseno sería también solución. La ecuación diferencial que estamos tratando es una ecuación diferencial lineal, es decir  $x$  y sus derivadas temporales sólo figuran con exponente uno, con coeficientes constantes; es además homogénea, lo que significa que el segundo miembro es nulo. En general, podría ser una función del tiempo,  $F(t)$ , que en este caso es idénticamente nula  $F(t) \equiv 0$ . Este tipo de ecuaciones diferenciales aparecen con gran frecuencia en la física y presentan una propiedad interesante: si dos funciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  satisfacen a la misma ecuación diferencial lineal homogénea, también la satisface cualquier combinación lineal entre ellas

$$x = b x_1(t) + c x_2(t)$$

siendo  $b$  y  $c$  constantes arbitrarias. Aceptando esta propiedad probemos la función

$$x(t) = a \operatorname{sen} \omega_1 t + b \cos \omega_2 t \quad (1.4)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son constantes de valores todavía desconocidos; su derivada segunda es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_1^2 a \operatorname{sen}\omega_1 t - \omega_2^2 b \operatorname{cos}\omega_2 t$$

substituyendo en la ecuación 1.1.a

$$-k [ a \operatorname{sen}\omega_1 t + b \operatorname{cos}\omega_2 t ] = m [ -\omega_1^2 a \operatorname{sen}\omega_1 t - \omega_2^2 b \operatorname{cos}\omega_2 t ]$$

reagrupando términos queda

$$a(m\omega_1^2 - k)\operatorname{sen}\omega_1 t + b(m\omega_2^2 - k)\operatorname{cos}\omega_2 t = 0$$

Esta ecuación será cierta si

$$m\omega_1^2 = k \quad \text{y} \quad m\omega_2^2 = k$$

o, lo que es lo mismo, si

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$$

Como que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  eran constantes arbitrarias podemos asignarles este valor  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Por lo tanto, la función dada en 1.4, satisface la ecuación diferencial y es una forma de describir el movimiento de la masa oscilante. Observemos que esta solución presenta, todavía, dos constantes arbitrarias desconocidas. Esto es así ya que en la ecuación diferencial del movimiento, ecuación 1.1.b, aparece una derivada segunda, lo que implica que para obtener  $x(t)$  hay que hacer dos integraciones y cada una de ellas supone la introducción de una constante arbitraria. En las diversas situaciones físicas reales posibles, las constantes  $a$  y  $b$  quedan determinadas por las *condiciones iniciales*. Por ejemplo, supongamos que estiramos el muelle hasta una posición  $x = x_0$  y lo soltamos, sin empujar, de tal manera que  $v = 0$ , en  $t = 0$ . Aplicando estas condiciones iniciales a la función 1.4 tenemos

$$x(0) = a \operatorname{sen}0 + b \operatorname{cos}0 = x_0$$

$$v(0) = \omega a \operatorname{cos}0 - \omega b \operatorname{sen}0 = 0$$

de donde  $b = x_0$  y  $a = 0$ , y el movimiento viene representado por,  $x = x_0 \operatorname{cos}\omega t$ .

Para considerar unas condiciones iniciales más generales es útil escribir la ecuación 1.4 en otra forma. Recordando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{cos}(\omega t + \phi) = \operatorname{cos}\omega t \operatorname{cos}\phi - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\phi$$

podemos escribir

$$x = A \operatorname{cos}(\omega t + \phi) \tag{1.5}$$

donde  $A$  y  $\phi$  son constantes y están relacionadas con las  $a$  y  $b$  por

$$-A \operatorname{sen}\phi = a \quad \text{y} \quad A \operatorname{cos}\phi = b$$



la interpretación física de la función 1.5 es más fácil que la de la 1.4, ya que  $A$  es la amplitud del movimiento, como se muestra en la figura 1.2, y  $\phi$  es la fase inicial o constante de fase que nos indica cuánto antes de  $t = 0$  se alcanza el máximo de  $x$ ,  $\Delta t = -\phi/\omega$ . El valor de  $\phi$  no afecta la forma de la curva  $x(t)$ , que siempre es sinusoidal. En general,  $\phi$  será de interés cuando comparemos oscilaciones de dos magnitudes o sistemas.

La masa, en su oscilación, repite su movimiento después de un tiempo  $T$  que llamaremos periodo; lo definimos como el menor intervalo de tiempo que hace que

$$\Phi(t) = \Phi(t+T)$$

o sea que hace que

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega(t+T) + \phi)$$

para cualquier valor de  $t$ , lo que exige que  $\omega T = 2\pi$ . También se usa la frecuencia  $f$  medida en ciclos o periodos por unidad de tiempo, o hertz (Hz)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.6)$$

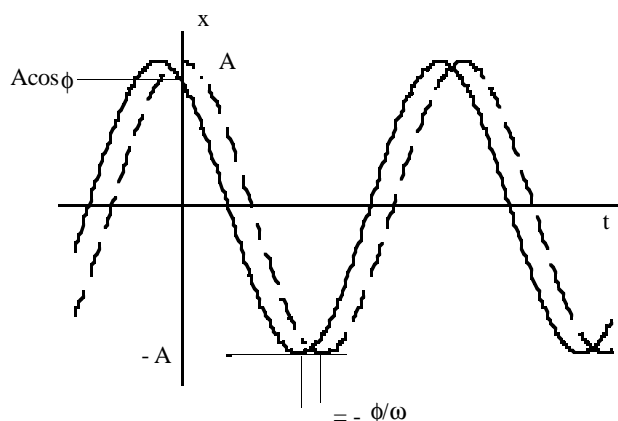


Fig. 1.2

La velocidad y la aceleración de la masa oscilante se obtienen por derivación de la ecuación de movimiento

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.7)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.8)$$

como vemos son también funciones armónicas del tiempo. El valor máximo de la velocidad es  $v_{\max} = \omega A$  y se alcanza al pasar por el punto de equilibrio,  $x = 0$ ; alcanza un valor nulo en los puntos de máximo desplazamiento  $x = \pm A$ . En la figura 1.3 se han representado desplazamiento y velocidad para un caso con  $\phi = 30^\circ$  y  $\omega > 1$ .

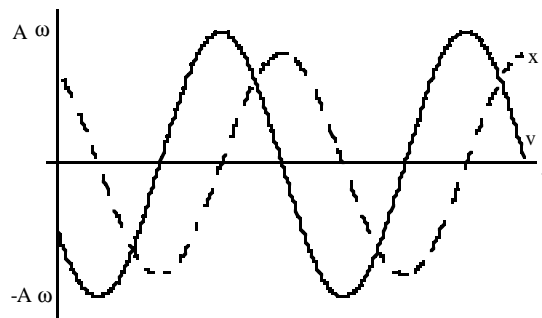


Fig. 1.3

La aceleración presenta un valor máximo  $a_{\max} = \omega^2 A$ , donde  $x = \pm A$  y nulo en  $x = 0$ . En la figura 1.4 se han representado desplazamiento y aceleración para el mismo caso de la gráfica de la velocidad.

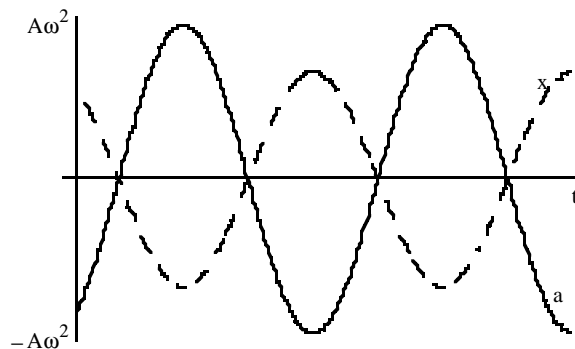


Fig. 1.4

### Ejemplo 1.1

Estudiar el movimiento de una masa,  $m$ , suspendida del techo mediante un muelle elástico lineal, de masa despreciable, y módulo elástico  $k$ , al separarla verticalmente de la posición de equilibrio

#### Solución

Tomamos el origen de la variable de posición,  $z$ , en la de equilibrio estático; las fuerzas que actúan sobre  $m$  se muestran en el diagrama de la figura 1.5, su suma, según la segunda ley de Newton, debe cumplir que

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z_0 + z) + mg$$

donde  $z_0$  indica la deformación del muelle en el equilibrio estático, por lo tanto se cumple

$$-kz_0 + mg = 0$$

y la ecuación diferencial queda de la forma

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz$$

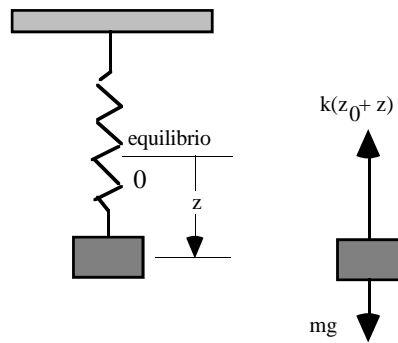


Fig. 1.5

como la ecuación 1.1.a; así, la masa  $m$  realizará un movimiento armónico simple entorno de la posición de equilibrio con una frecuencia  $\omega$  tal que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

### 1.3 Exponenciales complejos

Si representamos mediante  $j$  la unidad imaginaria  $j = \sqrt{-1}$  y recordamos la expresión de Euler

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$$

la ecuación 1.5, del movimiento armónico simple, puede escribirse como parte real,  $\Re$ , de una función compleja, así

$$x = \Re [A e^{j(\omega t + \phi)}]$$

Esta expresión puede escribirse como

$$x = \Re [A e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \Re [A e^{j\omega t}] = \Re [x]$$

donde  $A = A e^{j\phi}$  se denomina amplitud compleja. El complejo  $x$  puede interpretarse geoméricamente como un vector rotatorio o fasor,  $A$ , de módulo  $A$  y argumento  $\phi$ , que gira con velocidad angular constante  $\omega$ , figura 1.6.a. La proyección de  $A$  sobre el eje real,  $A \cos(\omega t + \phi)$ , es la que tiene sentido físico. Desde un punto de vista cinemático es equivalente a imaginar un MAS como proyección de un movimiento circular uniforme sobre un diámetro. La ventaja de la utilización de los exponenciales complejos será patente a lo largo del texto, pero veamos ahora la comodidad que ofrece en el cálculo de las derivadas. La derivada de  $x$  es

$$v = j \omega A e^{j(\omega t + \phi)} = j \omega x$$

y la derivada de  $v$

$$a = -\omega^2 A e^{j(\omega t + \phi)} = -\omega^2 x$$

vemos, pues, que la derivada de una exponencial compleja se obtiene sin más que multiplicar la exponencial por  $j\omega$ . Multiplicar un complejo por  $j\omega$  significa multiplicar su módulo por  $\omega$  y sumar  $\pi/2$  radianes a su argumento. En la figura 1.6.b se muestran los tres complejos  $x$ ,  $v$  y  $a$ . Los complejos permiten tratar y visualizar fácilmente los desfases entre posición, velocidad y aceleración. Por supuesto, velocidad y aceleración del punto material que realiza el MAS, vendrán dadas por las partes reales de  $v$  y  $a$ , respectivamente

$$v = \Re [v] \quad \text{y} \quad a = \Re [a]$$

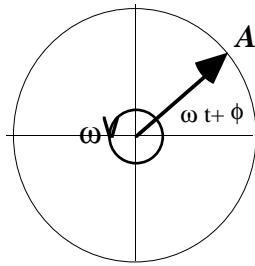


Fig 1.6 a

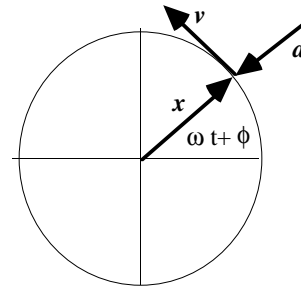


Fig 1.6 b

**Ejemplo 1.2**

Un punto P describe un movimiento circular uniforme alrededor del origen, siendo  $R$  el radio de la circunferencia y  $\omega$  su velocidad angular.

- a) Hallar las ecuaciones del movimiento  $x(t)$ ,  $y(t)$ , así como las expresiones de las componentes de la velocidad  $v_x$  y  $v_y$ . Comprobar que tanto  $x(t)$  como  $y(t)$  corresponden a movimientos armónicos simples. ¿Qué significado tiene el ángulo de fase inicial?
- b) Supóngase que el movimiento se realiza sobre el plano complejo, coincidiendo el eje  $Ox$  con el eje real y el  $Oy$  con el imaginario. De esta forma, el vector de posición  $\mathbf{r}=(x, y)$ , debe ser sustituido por el número complejo  $X = x + jy$ , donde  $j = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria. ¿Con qué parámetros podemos identificar el módulo y el argumento de dicho número complejo?
- c) Usando la expresión  $e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$ , ¿cómo podemos representar el número  $X$  en función del tiempo?. Comprobar que las partes reales de  $X$ ,  $dX/dt$  y  $d^2X/dt^2$ , se corresponden con las expresiones de la posición, velocidad y aceleración de un movimiento armónico simple (MAS).
- d) Comprobar que la función compleja  $X = Ae^{j\omega t}$  es una solución de la ecuación diferencial de un MAS. ¿Qué significado tienen el módulo y el argumento de  $A$ ?

**Solución**

a) El vector de posición,  $\mathbf{r}$ , del punto P será un vector de módulo constante,  $R$ , que para una posición genérica determinada por el ángulo  $\theta$ , tendrá por componentes

$$\mathbf{r} = R\mathbf{u}_r = R \cos\theta \mathbf{i} + R \sin\theta \mathbf{j}$$

como la velocidad angular,  $\omega$ , es constante

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$$

podemos escribir

$$\theta = \omega t + \phi$$

y

$$\mathbf{r} = R \mathbf{u}_r = R \cos(\omega t + \phi) \mathbf{i} + R \sin(\omega t + \phi) \mathbf{j}$$

La velocidad será

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -R\omega \sin(\omega t + \phi) \mathbf{i} + R\omega \cos(\omega t + \phi) \mathbf{j}$$

Se comprueba, efectivamente que las componentes  $x(t)$  y  $y(t)$  de  $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\omega t + \phi) \\ y(t) &= R \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

corresponden a ecuaciones de movimientos armónicos simples. La constante de fase  $\phi$ , es el ángulo correspondiente a la posición inicial del movimiento circular uniforme.

b) Si se representa el movimiento en el plano complejo  $\mathbf{X} = x + yj$ , el módulo de  $\mathbf{X}$  corresponde al radio del movimiento circular uniforme, o bien a la amplitud de los movimientos armónicos simples vistos en a)

$$|\mathbf{X}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta} = R$$

mientras que el argumento no es más que la fase del movimiento

$$\theta = \omega t + \phi$$

c) En la expresión de  $\mathbf{X}$  sustituimos  $x(t)$  y  $y(t)$

$$\mathbf{X} = R (\cos \theta + j \sin \theta)$$

que podemos escribir

$$\mathbf{X} = R e^{j\theta} = R e^{j(\omega t + \phi)}$$

cuya parte real  $R \cos(\omega t + \phi)$  es la expresión de la posición de un punto que describa un MAS. Derivando  $\mathbf{X}$  respecto del tiempo

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = j\omega R e^{j(\omega t + \phi)}$$

como  $j = e^{j\pi/2}$  se puede escribir

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \omega R e^{j(\omega t + \phi + \pi/2)}$$

que muestra claramente que  $\mathbf{V}$  está adelantado  $\pi/2$ , o en cuadratura, respecto a  $\mathbf{X}$ . Tomando la parte real

$$\Re(\mathbf{V}) = \omega R \cos(\omega t + \phi + \pi/2) = -\omega R \sin(\omega t + \phi)$$

en correspondencia con la velocidad en un MAS

Derivando  $V$  respecto del tiempo

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{d(j\omega X)}{dt} = j\omega \frac{dX}{dt} = j\omega (j\omega X) = -\omega^2 X$$

y su parte real

$$\Re(-\omega^2 X) = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi)$$

corresponde a la aceleración en un MAS. La aceleración compleja se dice que está en oposición respecto a  $X$ . La posición relativa de los complejos que representan posición, velocidad y aceleración queda de manifiesto en la figura 1.5.b.

d) Si  $X = A e^{j\omega t}$ , su derivada segunda es

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\omega^2 X$$

sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene  $(-\omega^2 + \omega^2)X = 0$  en cualquier instante.

Escribiendo  $A = R e^{j\phi}$ , donde  $|A| = R$  y  $\phi$  es el argumento, identificamos el módulo con la amplitud del MAS y el argumento con la constante de fase del mismo.

#### 1.4 Condiciones iniciales

La ecuación del movimiento  $x(t)$  puede escribirse en función de las condiciones iniciales del movimiento, posición  $x(0)$  y velocidad  $v(0)$ , en lugar de en función de amplitud y fase, como en la ecuación 1.5. Haciendo en ésta  $t = 0$ ,

$$x(0) = A \cos(\omega \cdot 0 + \phi) = A \cos \phi \quad (1.9)$$

Haciendo  $t = 0$  en la ecuación 1.7 de la velocidad tenemos

$$v(0) = -\omega A \sin(\omega \cdot 0 + \phi) = -\omega A \sin \phi \quad (1.10)$$

como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \phi \cos \omega t - A \sin \phi \sin \omega t$$

se puede escribir

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (1.11)$$

A partir de las ecuaciones 1.9 y 1.10 que relacionan amplitud y fase con  $x(0)$  y  $v(0)$ , podemos obtener  $A$  y  $\phi$  a partir de esas condiciones iniciales. Resolviendo, obtenemos

$$\phi = \arctg \frac{-v(0)}{\omega x(0)} \quad (1.12)$$

$$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}} \quad (1.13)$$

El triángulo de la figura 1.7 permitirá recordar estas expresiones con facilidad

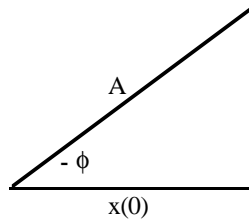


fig. 1.7

### Ejemplo 1.3

Una partícula oscila con un movimiento armónico simple, siendo su periodo  $T = 2,0\text{s}$ . Inicialmente está en su posición de equilibrio y se mueve con una velocidad de  $4,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  en el sentido positivo del eje  $Ox$ .

Escribir las expresiones de su posición  $x(t)$ , su velocidad  $v(t)$  y su aceleración  $a(t)$ , en función del tiempo.

#### Solución

En un MAS la amplitud  $A$  y la fase inicial  $\phi$ , dependen de las condiciones iniciales del movimiento, mientras que la frecuencia angular o pulsación,  $\omega = 2\pi/T$ , depende solamente de las características del sistema. En nuestro caso

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = 3,1\text{ s}^{-1}$$

las condiciones iniciales del movimiento son

$$x(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(0) = 4,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

substituyendo estos datos en el triángulo de la figura 1.7, se obtiene directamente que  $\phi = -\pi/2$  y  $A = v(0)/\omega = 1,3\text{m}$ . Se puede pues escribir

$$x(t) = 1,3 \cos(3,1t - \pi/2) = 1,3 \text{ sen}3,1t, \text{ m}$$

Derivando

$$v(t) = 4,0 \cos3,1t, \text{ ms}^{-1}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -13 \text{ sen}3,1t, \text{ ms}^{-2}$$

### Ejercicio 1.1

La posición de una partícula viene dada por  $x(t) = A \cos\omega t$ , donde  $A = 4,0\text{m}$  y  $\omega = 2,0\text{s}^{-1}$ .

- Hallar la frecuencia y el periodo del movimiento.
- Hallar las expresiones de la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.
- Obtener la velocidad y la aceleración en el instante inicial, así como sus valores máximos.

R:

$$\begin{aligned} \text{a) } f &= 1/\pi = 0,32\text{ Hz} ; T = 3,1\text{ s} & \text{b) } v(t) &= -8,0\text{sen}2t ; a(t) = -16\text{cos}2t \\ \text{c) } v(0) &= 0\text{ms}^{-1} ; a(0) = -16\text{ms}^{-2} ; v_{\text{max}} &= 8\text{ms}^{-1} ; a_{\text{max}} &= 16\text{ms}^{-2} \end{aligned}$$

Resumiendo lo visto hasta ahora, y por extensión, podemos decir que cualquier sistema físico que pueda describirse mediante una sola magnitud,  $\Psi$ , que obedezca una ley del tipo

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \omega^2\Psi = 0$$

se llama oscilador armónico simple. La magnitud  $\Psi$  varía en torno de un valor que corresponde al equilibrio del sistema. El desplazamiento, respecto de su valor de equilibrio, tiene una dependencia temporal del tipo

$$\Psi(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

en donde ya se ha tomado el origen en el valor medio de  $\Psi$  alrededor del cual oscila el sistema. En esta expresión  $A$ ,  $\omega$  y  $\phi$  son tres constantes y el tiempo,  $t$ , es la variable.  $A$  es una constante positiva denominada amplitud;  $\omega$  es la frecuencia angular o pulsación, que caracteriza la periodicidad temporal del fenómeno y viene medida en rad/s.

Todos los osciladores armónicos tienen las siguientes características:

- i) La amplitud  $A$  es constante; ésto es lo que indicamos diciendo que la oscilación es simple.
- ii) La frecuencia  $\omega$ , y por lo tanto el periodo, es independiente de la amplitud. Oscilaciones grandes y pequeñas tienen el mismo periodo, (isocronismo).
- iii) La dependencia temporal de la cantidad que oscila puede escribirse como una función sinusoidal de una frecuencia única, la oscilación es armónica.

### 1.5 Energía de un oscilador armónico

Si desplazamos de su posición de equilibrio el cuerpo sujeto al muelle elástico y posteriormente lo soltamos, el muelle es capaz de realizar un trabajo sobre el cuerpo. Podemos, pues, asociar una energía potencial al sistema masa-muelle. La energía potencial será igual al trabajo realizado para comprimir o estirar el muelle. Como en ambos casos la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido, podemos escribir

$$U(x) = W = \int_0^x F dx$$

donde se ha tomado la posición de equilibrio,  $x = 0$ , como nivel cero de la energía potencial. Como la fuerza necesaria para estirar/comprimir el muelle es  $F = kx$ ,

$$U(x) = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

El cuerpo está en un *pozo de potencial* originado por el muelle. Todo MAS está caracterizado por un pozo de potencial parabólico. Es decir, la energía potencial es proporcional al cuadrado del desplazamiento respecto al equilibrio.

En ausencia de rozamiento, la energía mecánica es una magnitud que se conserva. Esto es, la suma de las energías cinética y potencial permanece constante cuando el cuerpo realiza un MAS. Dicho de otra



forma, el trabajo *hecho por el muelle* cuando el cuerpo se mueve de una posición  $x_1$  a otra  $x_2$  es igual a la variación de energía cinética

$$-\Delta U(x) = \Delta E_k$$

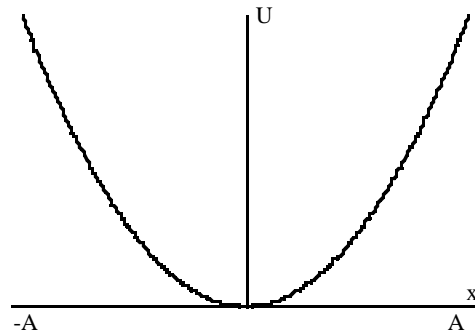


Fig. 1.8 Variación de la energía potencial con la posición

como  $x_1$  y  $x_2$  son arbitrarios

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \text{constante} \quad (1.14)$$

Si las condiciones iniciales consisten en dar un desplazamiento inicial  $x(0) = A$ , soltando el oscilador desde el reposo,  $v(0) = 0$ , la energía potencial  $U(t)$  será, en  $t = 0$

$$U(0) = \frac{1}{2} k A^2$$

esta energía potencial inicial es igual a la energía total,  $E$ , del sistema. Para  $x = 0$  la velocidad tiene sus valores extremos  $\pm v_{\max} = \pm \omega A$ , y

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

que expresa que el valor de la energía en la posición de equilibrio, en la que toda la energía es cinética, es igual al valor de la energía en la elongación máxima, en la que toda es potencial.

La energía mecánica de una partícula de masa  $m$  que realiza un MAS también puede expresarse en la forma

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad (1.15)$$

*la energía mecánica es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento.*

La suma de la energía potencial  $U(t)$  y de la energía cinética  $E_k(t)$  es una constante, pero cada uno de los sumandos es una función del tiempo.

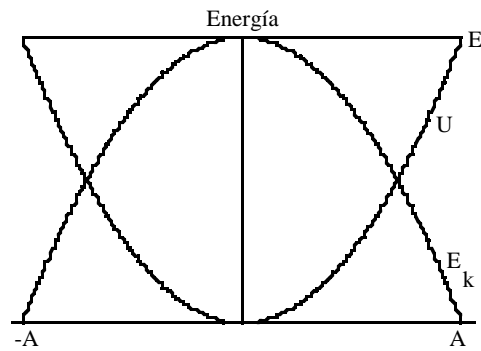


Fig. 1.9 Energía total,  $E$ , energía potencial  $U(x)$  y energía cinética  $E_k(x)$  como funciones de la posición

El promedio temporal de la energía potencial  $\langle U(t) \rangle$  es

$$\langle U(t) \rangle = \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle$$

sustituyendo  $x(t)$  por  $A \cos(\omega t + \phi)$

$$\langle U(t) \rangle = \frac{1}{2} k \langle (A \cos(\omega t + \phi))^2 \rangle = \frac{1}{2} k A^2 \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle$$

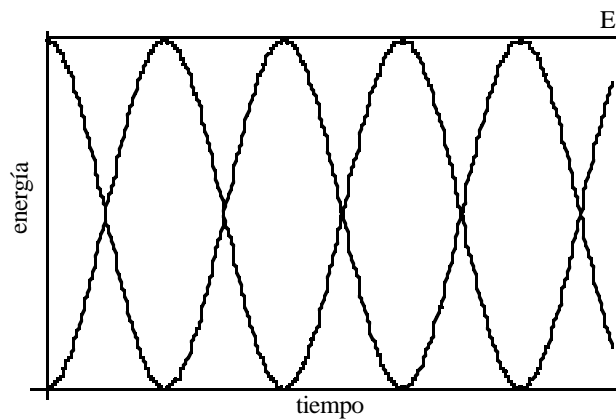


Fig. 1.10 Energía total,  $E$ , energía potencial  $U(t)$  y energía cinética  $E_k(t)$  como funciones del tiempo

El promedio temporal de la energía cinética  $\langle E_k(t) \rangle$  es

$$\langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

sustituyendo  $m$  por  $k/\omega^2$  y  $v(t)$  por  $-\omega A \sin(\omega t + \phi)$ , se obtiene

$$\langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega^2} \langle (-\omega A \sin(\omega t + \phi))^2 \rangle = \frac{1}{2} k A^2 \langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle$$

Como  $\sin^2(\omega t + \phi)$  y  $\cos^2(\omega t + \phi)$  son de la misma forma, salvo un desplazamiento de  $T/4$ , su valor promedio es el mismo e igual a  $1/2$  ya que  $\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) = 1$ . Tenemos entonces

$$\langle U(t) \rangle = \langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E \quad (1.16)$$

la energía está repartida por igual entre cinética y potencial, en valor promedio temporal.

### Ejemplo 1.4

Una masa de 3,0kg sujeta a un muelle oscila armónicamente con una amplitud de 10mm y una frecuencia de 2,0Hz.

- ¿Cuál es la energía total del movimiento?
- Escribir la ecuación general,  $x(t)$ , que describe la posición de la masa respecto a su posición de equilibrio. ¿Puede determinarse la constante de fase a partir de la información dada?

#### Solución

- La energía de un MAS es una constante del movimiento igual a

$$E = E_k + U = E_{k,\max} = U_{\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

en nuestro caso se puede calcular a partir de la energía cinética máxima

$$E = E_{k,\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot (2\pi \cdot 2)^2 \cdot (10^{-2})^2 = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

- La ecuación del movimiento es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

del enunciado se obtiene:  $A = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  y  $\omega = 2\pi \cdot 2,0 = 13 \text{ s}^{-1}$ , quedando sin determinar la constante de fase,  $\phi$ , puesto que no conocemos las condiciones iniciales. Sería preciso conocer la posición o la velocidad o la aceleración en un instante dado. Luego

$$x(t) = 1,0 \cdot 10^{-2} \cos(13t + \phi)$$

### Ejercicio 1.2

Una masa oscila sujeta a un muelle elástico:

- ¿Qué fracción de su energía total está en forma de energía cinética cuando el desplazamiento es la mitad de su amplitud?
- ¿Para qué desplazamiento son iguales sus energías cinética y potencial?

**R:**

$$\text{a) } E_k = \frac{3}{4} E; \text{ b) } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$$

**Ejemplo 1.5**

En un tubo en forma de U de sección recta constante,  $A$ , se introduce una columna de líquido de longitud  $L$ , produciéndose oscilaciones. Determinar el periodo de las mismas, suponiendo despreciable todo tipo de rozamiento.

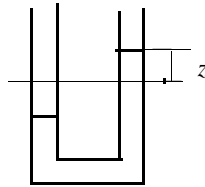


Fig. 1.10

**Solución**

En lugar de partir de la 2ª ley de Newton, como hasta ahora, partiremos de la conservación de la energía. Al ser despreciable todo tipo de rozamiento la energía mecánica debe conservarse. El movimiento puede describirse completamente en función del desplazamiento vertical,  $z$ , de la superficie libre del líquido respecto a su posición de equilibrio. Tomando la posición de equilibrio como nivel de energía potencial nula, el aumento de energía potencial en la posición genérica de la figura 1.10 se corresponde con el aumento debido a elevar una columna de líquido de longitud  $z$  del tubo de la izquierda, hasta la altura  $+z$ , colocándola en la parte superior del tubo de la derecha. Así,

$$U = (Az \rho).g.z = A \rho g z^2$$

Admitiendo que todas las porciones del líquido se mueven a la misma velocidad  $dz/dt$ , la energía mecánica puede escribirse

$$E = U + E_k = A \rho g z^2 + \frac{1}{2} LA \rho \left( \frac{dz}{dt} \right)^2$$

de la conservación de la energía,  $dE/dt = 0$

$$A \rho g 2z \frac{dz}{dt} + LA \rho \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

como  $dz/dt$  no es siempre nula, simplificando y ordenando

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2g}{L} z = 0$$

ecuación diferencial cuya solución  $z(t)$  corresponde a un MAS de periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

**Ejemplo 1.6**

Sea un cuerpo de masa  $m = 2,0\text{kg}$  que se puede mover sobre un plano, sujeto a una fuerza  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ , donde  $k = 50\text{Nm}^{-1}$ .

a) Calcular las ecuaciones del movimiento  $x(t)$  e  $y(t)$ , y representar su trayectoria, si en el instante  $t=0$  su posición es  $\mathbf{r}(0) = (0,10, 0,15)$  m y su velocidad  $\mathbf{v}(0) = (0, 0)$   $\text{ms}^{-1}$

b) Repetir el proceso anterior y determinar, además, la diferencia entre las fases del movimiento en  $x$  y del movimiento en  $y$ , para los casos siguientes:

$$\text{b1) } \mathbf{r}(0) = (0,10, 0) \text{ m ; } \quad \mathbf{v}(0) = (0, 0,25) \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{b2) } \mathbf{r}(0) = (0,10, 0,03) \text{ m ; } \quad \mathbf{v}(0) = (0, 0,20) \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{b3) } \mathbf{r}(0) = (0,10, -0,03) \text{ m ; } \quad \mathbf{v}(0) = (0, 0,20) \text{ ms}^{-1}$$

c) Demostrar que, en cualquier caso posible, el valor de la diferencia de fase entre ambos movimientos  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ , cumple la siguiente relación:

$$|\text{sen } \Delta\phi| = \frac{y^*}{B}$$

donde  $y^*$  es el valor de  $y$  cuando  $x = 0$ , y  $B$  es el valor máximo de  $y$ .

**Solución:**

a) De la segunda ley de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\mathbf{r}$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{k}{m}\mathbf{r} = 0$$

donde  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ , por ser un movimiento plano. Así, esta ecuación diferencial vectorial puede escribirse mediante dos ecuaciones diferenciales escalares

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

su integración da las ecuaciones del movimiento

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{50/2} = 5,0\text{rad.s}^{-1}$  y  $A, B, \phi_1$  y  $\phi_2$  son constantes de integración cuyo valor queda determinado por las condiciones iniciales, mediante las ecuaciones 1.12 y 1.13

Para las condiciones iniciales dadas en este ejercicio resulta

$$\begin{array}{ll} \phi_1 = 0,00 & \phi_2 = 0,00 \\ A = 0,10\text{m} & B = 0,05\text{m} \end{array}$$

sustituyendo estos valores en las ecuaciones de movimiento se obtiene

$$\begin{aligned}x(t) &= 0,10\cos 5,0t \\y(t) &= 0,05\cos 5,0t\end{aligned}$$

ecuación de una recta en paramétricas. Eliminando el parámetro  $t$ , se obtiene la ecuación en cartesianas,

$2y = x$ , que está representada en la figura 1.11

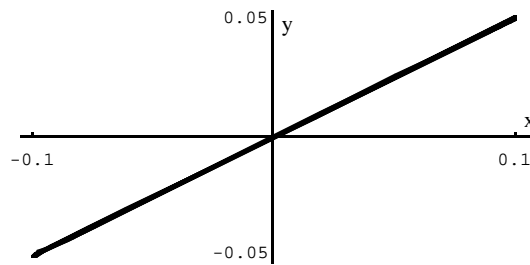


Fig. 1.11

b) Para las condiciones iniciales b1

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 0 & \phi_2 &= 3\pi/2 \\A &= 0,10 \text{ m} & B &= 0,05 \text{ m}\end{aligned}$$

de donde las ecuaciones de movimiento quedan en la forma

$$\begin{aligned}x(t) &= 0,10\cos 5,0t \\y(t) &= 0,05\cos(5t + 3\pi/2) = 0,05\sin 5,0t\end{aligned}$$

que corresponden a la elipse representada en la figura 1.12. La trayectoria sería recorrida en sentido antihorario.

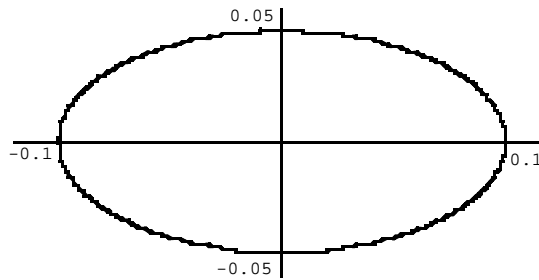


Fig. 1.12

Para las condiciones iniciales dadas en b2

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 0 & \phi_2 &= -53^\circ = -0,29\pi \\A &= 0,10\text{m} & B &= 0,05\text{m}\end{aligned}$$

y las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}x(t) &= 0,10\cos 5,0t \\y(t) &= 0,05\cos(5,0t - 0,29\pi)\end{aligned}$$

que corresponden, también, a una elipse pero que sus ejes no son los coordenados, figura 1.13.

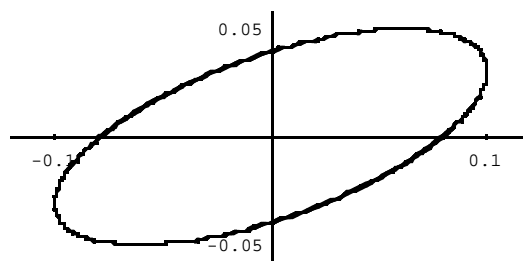


Fig. 1.13

La trayectoria sería recorrida, también, en sentido antihorario. En el tercer caso las constantes de integración toman los valores

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 0 & \phi_2 &= 53^\circ = 0,29\pi \\A &= 0,10\text{m} & B &= 0,05\text{m}\end{aligned}$$

y las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}x(t) &= 0,10\cos 5,0t \\y(t) &= 0,05\cos(5,0t + 0,29\pi)\end{aligned}$$

que corresponden a la misma elipse del caso anterior pero recorrida en sentido opuesto.

c) Las ecuaciones de movimiento generales que se han obtenido representan, en cualquier caso, una elipse (degenerada en una recta si  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{r}$ , de tal manera que en el instante  $t = t^*$ , para el que  $x = 0$ , deberá cumplirse

$$x(t^*) = 0 = A \cos(\omega_0 t^* + \phi_1)$$

de donde

$$\omega_0 t^* + \phi_1 = \pi/2, \text{ o } 3\pi/2$$

para  $x = 0$ ,  $y = y^*$ , valor extremo de  $y$ ,

$$y(t^*) = y^* = B \cos(\omega_0 t^* + \phi_2) = \pm B \text{sen}(\phi_1 - \phi_2)$$

donde el signo positivo corresponde a  $\omega_0 t^* + \phi_1 = 3\pi/2$ . y el negativo a  $\pi/2$ . Si llamamos  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ , podemos escribir

$$y^* = B |\operatorname{sen} \Delta\phi|$$

o sea

$$|\operatorname{sen} \Delta\phi| = \frac{y^*}{B}$$

En el caso particular en que  $y^* = B$ , entonces  $\Delta\phi = \pi/2$ , o  $3\pi/2$  y si además  $A = B$ , la trayectoria sería una circunferencia.

Una visualización de este tipo de figuras puede hacerse en la pantalla de un osciloscopio entrando las señales sinusoidales en las entradas horizontal y vertical; pueden variarse amplitudes y fases para obtener las distintas figuras. Si en lugar de tener una fuerza como la del enunciado del ejemplo, tuvieramos una vertical y otra horizontal, con distintas  $k$ , el movimiento resultante sería la superposición de dos MAS de diferentes frecuencias. El movimiento que se origina puede ser muy complejo, en general no sería ni periódico ni cerrado, pero si la relación entre frecuencias es igual a la relación entre dos números enteros se cierra y es periódico, en este caso las trayectorias reciben el nombre de curvas de Lissajous.

## 1.6 Oscilador mecánico

Hemos visto que si una partícula, en movimiento rectilíneo, tiene una aceleración siempre proporcional a la distancia a un punto fijo, sobre la recta de movimiento, y dirigida hacia él, su movimiento será armónico simple. Una situación tan particular no proporcionaría razón de la importancia del MAS. Veamos la justificación de su importancia. El interés se centra en el movimiento ligado de una partícula cuya energía potencial puede ser más o menos como la de la figura. 1.14. El punto que centra nuestro interés es aquel en que la función  $U(x)$  toma un

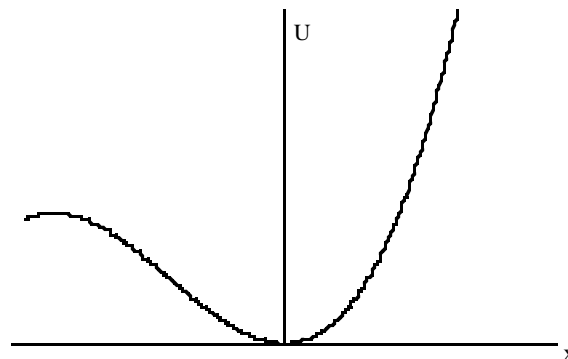


Fig. 1.14

valor mínimo; es decir, el punto en que la fuerza que actúa sobre la partícula es nula. Una partícula colocada con velocidad nula en ese punto, permanecería en reposo; es un punto de equilibrio estable. Vamos a estudiar el tipo de movimiento de una partícula en las proximidades de un punto de equilibrio de este tipo. Para mayor comodidad tomamos el origen de coordenadas en el punto de equilibrio y, para pequeñas separaciones de la posición de equilibrio, podemos desarrollar  $U(x)$  en serie de potencias. Desarrollando en serie de Taylor tenemos



$$U(x) = U(0) + \left[ \frac{dU}{dx} \right]_0 x + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2U}{dx^2} \right]_0 x^2 + \frac{1}{6} \left[ \frac{d^3U}{dx^3} \right]_0 x^3 + \dots$$

donde el subíndice 0 indica: valor de la derivada en  $x = 0$ . Si  $x = 0$  corresponde a una *posición de equilibrio*, debe cumplirse que

$$- \left[ \frac{dU}{dx} \right]_0 = F(0) = 0$$

$F(x)$  será una fuerza si  $x$  es una distancia. Si esta posición de equilibrio debe corresponder a un equilibrio estable la energía potencial debe de tener un mínimo en  $x = 0$ , y por lo tanto

$$\left[ \frac{d^2U}{dx^2} \right]_0 > 0$$

si consideramos el caso de pequeñas oscilaciones, o lo que es lo mismo  $x \ll 1$ , en el desarrollo en serie podemos despreciar los términos en  $x^3$  y siguientes, y tendremos

$$U(x) = U(0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2U}{dx^2} \right]_0 x^2$$

donde siempre podemos tomar arbitrariamente  $U(0) = 0$ . Vemos, pues, que *pequeños desplazamientos en torno de una posición de equilibrio estable, conducen siempre, en buena aproximación, a una energía potencial de la forma parabólica  $U(x) = Cx^2$  con  $C > 0$  y, por lo tanto, a un MAS.*

Derivando  $U(x) = Cx^2$  obtendremos la fuerza

$$F(x) = -2Cx = -kx$$

es decir existe una fuerza restauradora o, lo que es lo mismo, una fuerza que tiende a llevar la partícula hacia la posición de equilibrio. *Como consecuencia de esta relación lineal entre la respuesta y la sollicitación, se podrá aplicar el principio de superposición en el caso de existir varias sollicitaciones.*

## 1.7 Un oscilador molecular

Las fuerzas interatómicas que mantienen unidos los átomos para formar una molécula, o los iones que forman algunos cristales, pueden considerarse como superposición de las atracciones y repulsiones entre las cargas eléctricas positivas y negativas. Tomando un cristal de NaCl, como ejemplo típico, la energía por molécula, o par de iones  $\text{Na}^+\text{Cl}^-$ , respecto a los iones infinitamente separados podemos escribirla como

$$U(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^{12}}$$

el primer término modeliza la energía coulombiana de atracción, para una separación  $r$  entre núcleos. Esta atracción está limitada por la repulsión que surge al solaparse las nubes electrónicas de anión y

cación. Su energía asociada varía rápidamente con la separación y queda expresada por el segundo término. Para el NaCl podemos tomar  $A = 25 \text{ eV}\text{\AA}$  (electrón-voltio por amstrong).

Hay una distancia  $r_0$  de equilibrio entre las dos fuerzas, para el NaCl cristalino  $r_0 = 2,8\text{\AA}$ ; en ella

$$F = -\frac{dU}{dr} = 0 = -\left[\frac{A}{r^2} - 12\frac{B}{r^{13}}\right] = -\frac{1}{r^2}\left[A - 12\frac{B}{r^{11}}\right]$$

aparte de la solución trivial  $r = \infty$ , tenemos  $r_0 = (12B/A)^{1/11}$ . Para esta distancia  $U(r_0) = -11A/12r_0$ , que vale  $-8,1\text{eV}$  para el NaCl.

En el entorno de  $r_0$ , o si se quiere cuando la energía sea ligeramente superior a  $U(r_0)$ , los iones realizarán un MAS. La constante del muelle será

$$k = \left[\frac{d^2U}{dr^2}\right]_{r=r_0} = -\left[\frac{dF}{dr}\right]_{r=r_0} = \left[-\frac{2A}{r^3} + 12\cdot 13\frac{B}{r^{14}}\right]_{r=r_0} = \frac{11A}{r_0^3}$$

y la fuerza sería

$$F = -\frac{11A}{r_0^3}(r - r_0)$$

hay que recordar que el desarrollo en serie de  $U$  hay que hacerlo siempre en torno de la posición de equilibrio estable, que en este caso no es  $r = 0$ , sino  $r = r_0$ .

### Ejemplo 1.7

Un anillo de carga eléctrica uniforme  $-q$  y radio  $R$  está situado permanentemente en el plano  $x = 0$ , con su centro en el origen de coordenadas. Una carga  $+q$  puede moverse sobre el eje  $OX$ .

A.- La gráfica de la energía potencial electrostática de una carga puntual  $+q$ , situada en el eje  $OX$ , es de la forma representada en la figura 1.15:

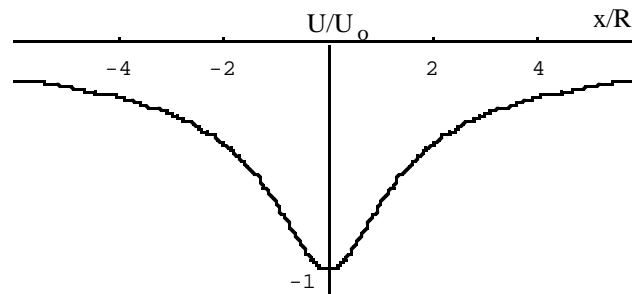


Fig. 1.15

a.1- Determinar la expresión analítica del potencial originado por el anillo en los puntos de eje  $OX$ , suponiendo  $V(\infty) = 0$ .

a.2- En la figura 1.15 se ha representado  $U(x)$  en forma normalizada, precisar el valor de  $U_0$ .

a.3- Obtener la expresión de la parábola con la que se puede aproximar  $U(x)$  para  $x/R \ll 1$ .

a.4- Representar, cualitativamente, la fuerza que actúa sobre  $+q$ . Precisar una expresión de  $F(x)$  para  $x/R \ll 1$ .

B.- Se aplica un campo eléctrico uniforme y estacionario  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}$ , con  $E_0$  positivo y pequeño frente al valor máximo del creado por el anillo en  $OX$ . Suponiendo que  $\mathbf{E}$  no afecta a la forma ni a la posición del anillo:

- b.1- Trazar, de forma cualitativa, la gráfica de la energía potencial resultante.
- b.2- Determinar la nueva posición de equilibrio de  $+q$  en función de  $E_0$ .
- b.3- Dar la expresión del momento dipolar inducido en el sistema por  $E_0$ .
- b.4- Aplicación numérica. Determinar el campo eléctrico,  $E_0$ , necesario para que la nueva posición de equilibrio corresponda a  $x/R = 10^{-3}$ , siendo:  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ ,  $R = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{m}$ .

### Solución

a.1- Suponiendo  $V(\infty) = 0$ , el potencial electrostático en los puntos del eje  $OX$ , vendrá dado por:

$$V(x,0,0) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

en donde la integral está extendida a todo el anillo. Ya que las distancias desde cualquier  $dq$ , al punto genérico  $(x,0,0)$  son todas iguales a  $r$

$$V(x,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

a.2- La carga  $+q$  situada en el potencial  $V(x,0,0)$  calculado arriba tendrá una energía potencial

$$U = qV = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} [1 + (x/R)^2]^{-1/2}$$

llamando

$$U_0 = -U(0) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

tenemos

$$\frac{U}{U_0} = -[1 + (x/R)^2]^{-1/2}$$

que es la función representada en la figura 1.11 del enunciado.

a.3- Del desarrollo en serie de potencias de  $[1 + (x/R)^2]^{-1/2}$  tomamos los dos primeros términos del mismo  $1 - (x/R)^2/2$ , que aproximan bien el valor de la función para  $x/R \ll 1$ , así queda la parábola

$$U \approx -U_0 \left[ 1 - \frac{(x/R)^2}{2} \right]$$

a.4- Como  $F(x) = -dU/dx$ , por inspección de la gráfica 1.15 del enunciado, podemos dibujar cualitativamente la fuerza,  $F(x)$ , ejercida sobre  $+q$  por el anillo, como se muestra en la figura 1.16.

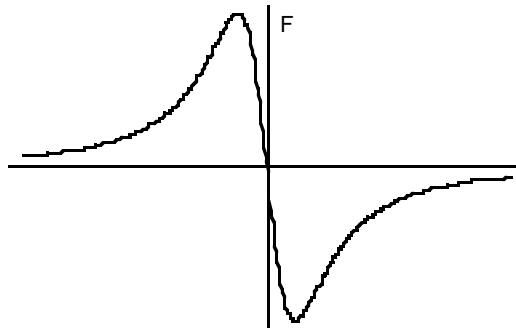


Fig. 1.16

La ecuación de la recta en el entorno de  $x = 0$ , la obtendremos por derivación de la función cuadrática del apartado anterior, válida en ese entorno. Así

$$F = - \frac{d(-U_0 [1 - (x/R)^2/2])}{dx} = -U_0 \frac{x}{R^2} \quad \text{,, } |x/R| \ll 1$$

o bien

$$F = - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x$$

b.1- Recordemos que no es la función energía potencial la que está definida sino su variación. En este caso:

$$\Delta U = -F\Delta x = -E_0 q x$$

donde  $\Delta x = x$ , ya que  $x = 0$  es la posición de equilibrio de  $q$ , de la que es separada por acción del campo aplicado. La energía potencial resultante será, por superposición,  $U' = U + \Delta U$ . Las gráficas de las figuras 1.17 y 1.18 muestran, de forma cualitativa,  $U$  y  $\Delta U$  y la superposición de ambas, respectivamente. El mínimo de  $U(x)$  habrá quedado desplazado en la dirección del campo aplicado aunque, dada su pequeñez, no se aprecie en la gráfica.

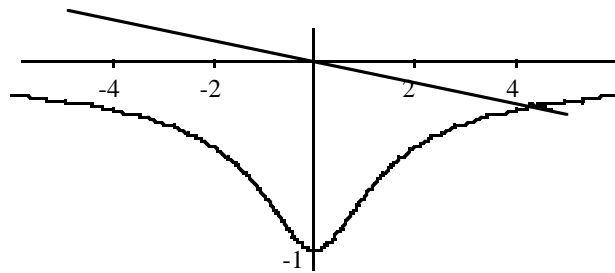


Fig. 1.17

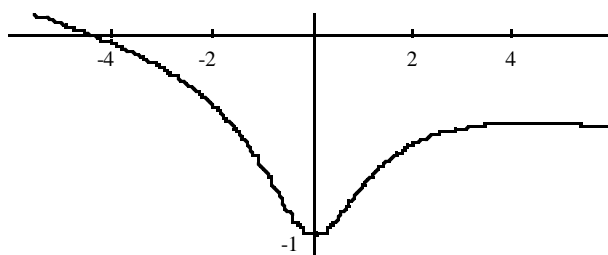


Fig. 1.18

b.2- Como el módulo del campo aplicado  $E_0$  es pequeño frente a  $F_{\text{máx}}/Q$ , podemos considerar que la nueva posición de equilibrio,  $x_e$ , cae dentro de la zona lineal de la fuerza aplicada, así la condición de equilibrio

$$\mathbf{F}_{\text{anillo}} + \mathbf{F}_{\text{aplicada}} = \mathbf{0}$$

puede escribirse como

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x_e = -qE_0$$

de donde

$$x_e = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E_0}{q}$$

b.3- Para los valores de  $E_0$  que hagan válido el cálculo anterior, el momento dipolar inducido resulta proporcional al campo aplicado

$$p = qx_e = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$$

b.4- De la condición de equilibrio

$$E_0 = \frac{qx_e}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 5,1 \cdot 10^8 \text{ Vm}^{-1}$$

### Ejemplo 1.8

Una masa de 2,0kg se deja libre sobre un plano inclinado  $\theta = 30^\circ$  y en contacto con un muelle de constante  $k = 98\text{Nm}^{-1}$  y masa despreciable, que está sin deformar en la posición  $x = 0$ .

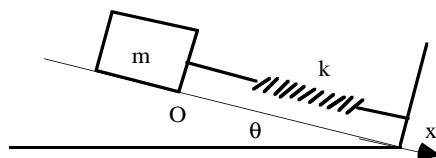


Fig.1.19

- A.- Suponiendo que la masa se coloca sin velocidad y que el rozamiento entre masa y plano es nulo:
- 1- Escribir la función energía potencial  $U(x)$  y representarla, tomando como nivel arbitrario de energía potencial  $U(x=0) = 0$
  - 2- Determinar la posición de equilibrio y la de máxima deformación del muelle.
- B.- Suponiendo que la masa se coloca con una velocidad  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i}$ ,  $v_0 = 0,32\text{ms}^{-1}$ , quedando unida al muelle y que el rozamiento entre masa y plano es nulo:
- 1- ¿Varía la función energía potencial  $U(x)$  determinada en a.1 ?
  - 2- Calcular de nuevo la posición de equilibrio y la de máxima deformación del muelle.
- C.- Manteniendo las condiciones de B pero considerando un coeficiente de rozamiento,  $\mu$ , no nulo:
- 1- Determinar la primera posición en que se anulará la velocidad si  $\mu = 0,395$

### Solución

La componente del peso según el plano inclinado provocará el deslizamiento de la masa comprimiendo el resorte.

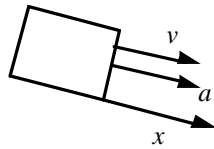


Fig. 1.20.a Diagrama cinemático

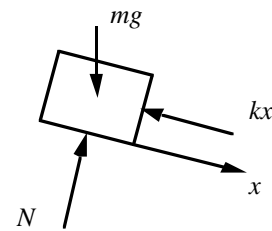


Fig. 1.20.b Diagrama de fuerzas

La componente según  $x$  de la fuerza resultante es, para cualquier posición

$$F(x) = mg \operatorname{sen} \theta - kx$$

a.1 La variación de la función energía potencial al pasar de  $x = 0$ , a  $x = x$ , será

$$U(x) - U(0) = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (mg \operatorname{sen} \theta - kx) dx = \frac{kx^2}{2} - mg \operatorname{sen} \theta x$$

Tomando, arbitrariamente,  $U(0) = 0$ , la energía mecánica del sistema es

$$E = U + E_k = 0$$

y

$$U(x) = 49x^2 - 9,8 x$$

a.2 La posición de equilibrio corresponde a  $F = 0$

$$mg \operatorname{sen} \theta - kx_e = 0$$

de donde

$$x_e = \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{k} = 0,1\text{m}$$

que corresponde, obviamente, al mínimo de  $U(x)$ .

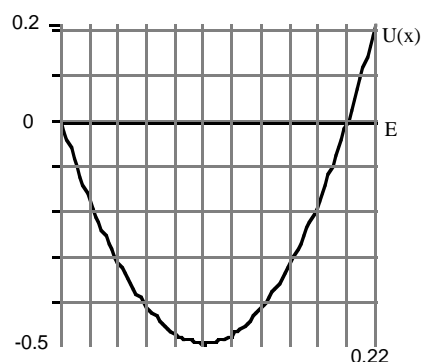


Fig.1.22 Gráfica de la función energía potencial  $U(x) = 49x^2 - 9,8x$

La máxima deformación corresponde a la  $x^* = 0,20$  m en que toda la energía es, de nuevo, potencial  
 b.1 El hecho de cambiar las condiciones iniciales, ahora  $v_0 = 0,32\mathbf{i}$ , no cambia las fuerzas existentes y, por ende, no cambia ni el tipo de movimiento, ni la función energía potencial. Sí cambia la energía total que, ahora, en vez de ser nula valdrá

$$E = U + E_k = E_k(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0,1\text{J}$$

b.2 Al no variar las fuerzas, no hay variación de la posición de equilibrio. La posición de máxima deformación,  $x^*$ , depende de la energía y corresponde, como antes a

$$E = U(x^*)$$

$$0,1 = \frac{kx^{*2}}{2} - mg \operatorname{sen}\theta x^*$$

cuya raíz positiva es  $x^* = 0,21$ m.

c.1 Al considerar la presencia de una fuerza de rozamiento el diagrama de fuerzas es el de la figura.1.23

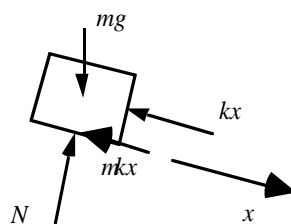


Fig. 1. 23 Diagrama de fuerzas

La fuerza de rozamiento es

$$F_r \leq \mu N = \mu mg \cos\theta = 0,395 \cdot 2,9,8 \cdot \cos 30 = 6,7\text{N}$$

Como la componente según  $x$  del peso es  $mg \operatorname{sen} \theta = 9,8 \text{ N} > 6,7 \text{ N}$ , la masa deslizará por el plano inclinado comprimiendo el muelle. Recordando que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la masa es igual a la variación de energía cinética

$$\int_0^x (mg \operatorname{sen} \theta - kx - \mu mg \cos \theta) dx = 0 - E_k(0)$$

o lo que es lo mismo

$$-U(x) - \mu mg \cos \theta x = -E_k(0)$$

como  $E_k(0) = E(0)$  podemos escribir

$$\mu mg \cos \theta x = E(0) - U(x)$$

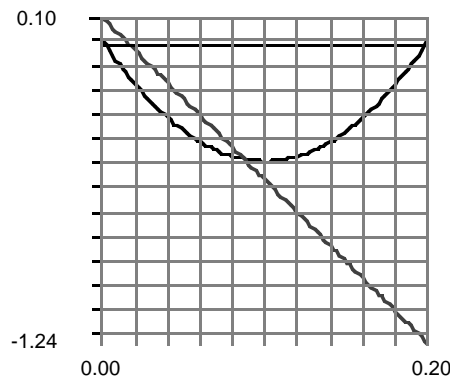


Fig. 1.24 Gráfica de la función energía potencial  $U(x) = 49x^2 - 9,8x$ , y de la recta  $E(0) - \mu mg \cos \theta x$

que interpretamos como que el trabajo realizado contra la fuerza de rozamiento debe ser igual a la energía cinética que tendría la masa en esa posición, si no existiera rozamiento

$$\mu mg \cos \theta x = \frac{1}{2} mv_o^2 - \left[ \frac{kx^2}{2} - mg \operatorname{sen} \theta x \right]$$

$$\frac{kx^2}{2} + mg (\mu \cos \theta - \operatorname{sen} \theta) x - \frac{1}{2} mv_o^2 = 0$$

substituyendo

$$49x^2 - 3,1x - 0,10 = 0$$

cuya raíz positiva es  $x_+ = 0,087 \text{ m}$ . En esta posición, la fuerza elástica del muelle tira hacia arriba del plano inclinado con una intensidad de  $kx_+ = 8,6 \text{ N}$ ; a ésta se suma una fuerza de rozamiento de  $9,8 - 8,6 = 1,3 \text{ N} < \mu N$ , que anula la componente del peso hacia abajo, de tal manera que con aceleración y velocidad nulas, la partícula se quedaría parada en esa posición.



**Ejercicio 1.4** .....

La figura 1.25 muestra la gráfica de la fuerza que actúa sobre una partícula de masa  $m = 0,40\text{kg}$ , en función de la posición; en  $x \leq 0$ , la fuerza es constante,  $F = 25\text{ N}$ .

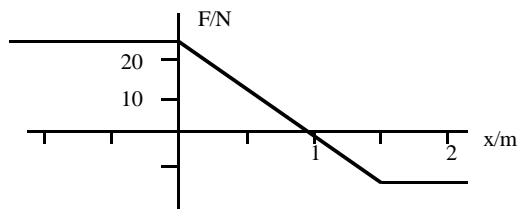


Fig. 1.25

Representar la gráfica de la energía potencial  $U(x)$  asociada a esta fuerza. Tomar  $U(1) = 0$ .

Si la partícula posee una velocidad de  $3,0\text{ms}^{-1}$  hacia la derecha al pasar por  $x = 1,0\text{m}$ , ¿qué tipo de movimiento describe?.

.....

**1.8 Oscilador eléctrico**

Al iniciar el tema se ha escrito que cualquier sistema físico que obedezca una ley del tipo expresado por la ecuación diferencial 1.3 se llama oscilador armónico. A partir de ahí, y para fijar ideas, se ha tratado con un sistema mecánico idealizado en el que la variable  $\Phi(t)$  representaba la posición,  $x(t)$ , de una partícula de masa  $m$  unida a un resorte lineal, de módulo elástico  $k$  y masa despreciable.

Un sistema eléctrico formado por una bobina de resistencia despreciable y coeficiente de autoinducción  $L$ , conectada a las placas de un condensador de capacidad  $C$ , como se muestra en la figura 1.26, constituye un sistema que oscila armónicamente. En cualquier instante, la diferencia de potencial entre las placas del condensador  $q(t)/C$ .

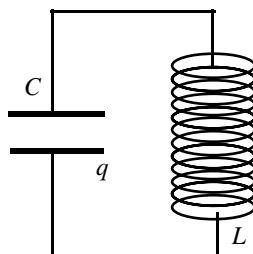


Fig. 1.26

En la bobina

$$V = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

tensión que, según la ley de Kirchoff, iguala a la del condensador

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (1.17)$$

del tipo de la ecuación 1.1.b siempre que

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad (1.18)$$

En el movimiento de las cargas eléctricas, el coeficiente de autoinducción representa el papel de una inercia, mientras que  $1/C$  el de una rigidez que se opone a la acumulación de las cargas en las armaduras del condensador. La solución de la ecuación 1.17 es de la forma

$$q(t) = q_o \cos(\omega t + \phi)$$

En el oscilador eléctrico suele ser práctico trabajar con la corriente eléctrica  $i(t)$ , o rapidez de variación de la carga del condensador con el tiempo

$$i(t) = -\omega q_o \sin(\omega t + \phi) = i_o \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

La energía del sistema permanece constante y solamente se intercambia entre dos formas: energía almacenada en forma de campo magnético en la bobina y energía almacenada en forma de campo eléctrico en el condensador

$$\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2C} q^2 = \text{constante}$$

La energía almacenada en forma de campo eléctrico en el condensador es análoga a la almacenada en forma de energía potencial en el resorte de un oscilador mecánico; la energía almacenada en forma de campo magnético en la bobina es análoga a la energía cinética.

### 1.9 Péndulo simple

Como ejemplo de oscilador consideremos un péndulo simple: sistema idealizado formado por un hilo inextensible y ligero, de longitud  $l$ , fijo por un extremo mientras que por el otro sujeta una masa  $m$ , que consideraremos como puntual. El movimiento de la partícula se realiza en un plano vertical bajo la sola influencia de la gravedad.

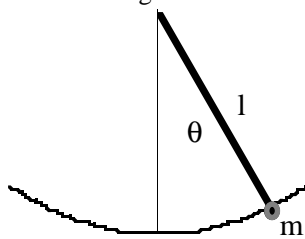


Fig. 1.27

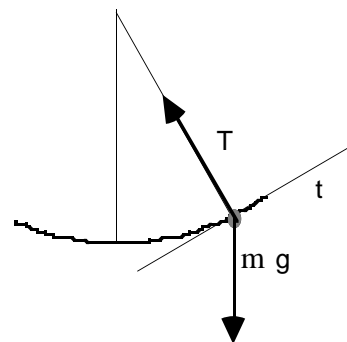


Fig. 1.28

La figura 1.27 muestra una posición genérica, en la que el desplazamiento  $\theta$ , (en radianes) respecto de la vertical, es la coordenada tomada para definir la posición. La trayectoria de  $m$  estará sobre una circunferencia de radio  $l$ , debido a la ligadura impuesta por el hilo. Según la segunda ley de Newton, las componentes de las fuerzas según la tangente a la trayectoria, figura 1.28 cumplen

$$-mg\text{sen}\theta = ma_t$$

El signo menos surge de cómo se ha definido el desplazamiento,  $s = l\theta$ , del punto material e indica que el peso actúa como una fuerza restauradora. Ya que la celeridad de  $m$  es  $v = l\frac{d\theta}{dt}$ , su aceleración tangencial es

$$a_t = l\frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

con lo que la ecuación diferencial del movimiento queda

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\text{sen}\theta$$

o bien

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\text{sen}\theta \quad (1.19)$$

ecuación que no es como la 1.1.a por lo que el movimiento no será un MAS, por lo que se debería resolver para obtener  $\theta(t)$ . Antes de intentar resolverla planteemos otro punto de partida para llegar a ella: partiendo de la conservación de la energía, en lugar de la segunda ley de Newton. Veamos: de las dos fuerzas,  $T$  y  $mg$ , que actúan sobre la masa,  $T$  es siempre perpendicular a la trayectoria y por lo tanto no realiza trabajo. Como  $mg$  es la única que realiza trabajo y es conservativa, podemos escribir  $\Delta E_k = -\Delta U$ , o bien en forma de ley de conservación de la energía

$$E = E_k + U = \text{constante} = E(0)$$

tomando  $U(\theta=0) = 0$ , tenemos

$$E(0) = \frac{1}{2}m\left[l\frac{d\theta}{dt}\right]^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

derivando respecto del tiempo

$$0 = m l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} + mgl \text{sen}\theta \frac{d\theta}{dt}$$

como  $d\theta/dt$  no es siempre nula, podemos simplificar y obtener de nuevo la ecuación 1.19. Observemos que esta ecuación no es lineal, pero sí lo sería si pudiéramos considerar  $\text{sen}\theta \approx \theta$ , el péndulo, en esta aproximación de *pequeñas oscilaciones*, se comporta como un oscilador armónico de periodo

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Para matizar el significado de *pequeñas oscilaciones* replanteamos el tema estudiando la función energía potencial, que en este caso podemos escribir

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$$

tomando los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la función coseno

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

sabemos que el primer término que despreciamos es  $\theta^4/24$  que acota el error de la aproximación. Por consiguiente

$$U(\theta) \approx mgl \left( 1 - \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) = mgl \frac{\theta^2}{2}$$

La aproximación nos ha conducido a una forma cuadrática de  $U(\theta)$ , donde  $\theta$  está medida a partir de la posición de equilibrio, que caracteriza a las oscilaciones armónicas.

Volvamos a la ecuación exacta, pero en vez de resolverla directamente consideremos la de conservación de la energía. El hecho de plantear la conservación de la energía es equivalente a haber realizado una integración de la ecuación diferencial del movimiento. En estos casos, se dice de la energía, que es una integral primera del movimiento, porque observemos que la ecuación que expresa su conservación es una ecuación diferencial de primer orden, (solo hay derivada primera).

Tomemos como condiciones iniciales  $\theta(0) = \alpha$  y  $v(0) = 0$  por lo que  $E(0) = mgl(1 - \cos\alpha)$  y simplificando en la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 (\cos\theta - \cos\alpha)$$

con  $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$ , frecuencia del sistema linealizado; podemos escribir

$$\omega_0 t = \int \frac{d\theta}{[2(\cos\theta - \cos\alpha)]^{1/2}}$$

esta integral no puede expresarse en forma de función analítica explícita. Resulta pues imposible conocer explícitamente la función  $\theta(t)$ , aunque sí es posible tabularla.

Se suele tener más interés en el conocimiento del periodo del movimiento que en el detalle de la función  $\theta(t)$ . Si  $T$  es el periodo del movimiento y recordando que  $\cos\theta = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{\theta}{2}$ , tenemos

$$T = \frac{2}{\omega_0} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\left( \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2}}$$

si hacemos el cambio de variable  $\text{sen}(\theta/2) = \text{sen}(\alpha/2)\text{sen}\phi$  y tenemos en cuenta que cuando  $\theta$  varía de 0 a  $\alpha$ ,  $\phi$  lo hará de 0 a  $\pi/2$ , tendremos

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \phi\right)^{1/2}}$$

esta integral se encuentra tabulada en las llamadas *tablas de integrales elípticas* para distintos valores de  $k = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ; se designa normalmente por la letra  $K$ . Podemos, con esta nomenclatura, comparar el periodo  $T$  de la solución exacta con el  $T_0$  de la solución aproximada

$$T = \frac{4K}{\omega_0} = \frac{2K}{\pi} T_0$$

Tabla 1.1 Valores de la integral elíptica  $K$  para cuatro valores de  $\alpha$

$\alpha$	0	10	20	30
$K$	1,571	1,574	1,583	1,598
$2K/\pi$	1,000	1,002	1,008	1,017

Si  $\alpha$  es pequeño ( $\alpha \ll 1$ ), podemos desarrollar en serie  $[1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \phi]^{-1/2}$  y quedarnos con los dos primeros términos del desarrollo, así

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \phi\right) d\phi = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)$$

y si consideramos  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{4}$ , tenemos

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) = T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

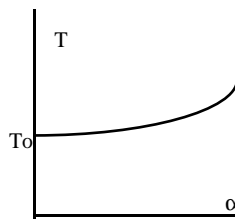


Fig. 1.10 Variación del periodo de la oscilación con la amplitud

Esta ecuación explicita el aumento del periodo de las oscilaciones con la amplitud. Podemos comparar este resultado con las soluciones de la tabla viendo que son iguales para la precisión expresada.

## 2 Oscilaciones libres amortiguadas

### 2.1 Oscilador armónico amortiguado

En un movimiento armónico simple, la "partícula" oscilaría indefinidamente. En cualquier situación real se observa que la amplitud decrece con el tiempo, es decir siempre existen fenómenos irreversibles (rozamiento, resistencia, ...) que disipan una cantidad de energía del oscilador, amortiguando la oscilación. Estos fenómenos son, generalmente, de interpretación complicada y varía según el sistema objeto de estudio. La forma más simple de traducirlos es mediante la introducción de una fuerza de rozamiento viscoso, o sea una fuerza proporcional a la velocidad de desplazamiento  $F = -bv$ . La ecuación diferencial tipo es, ahora, de la forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.1)$$

que continua siendo lineal, lo que permite un estudio matemático relativamente sencillo. Dividiendo ambos miembros por  $m$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

hacemos

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau} \quad (2.2)$$

y

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (2.3)$$

donde  $\tau$  es una constante que tiene dimensiones de tiempo y  $\omega_0$  corresponde a la frecuencia que tendría el oscilador en ausencia de amortiguamiento. Fijémonos que el producto  $\tau\omega_0$  es adimensional; jugará un papel importante, como veremos más adelante. Con el cambio se tiene

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.4)$$

que sustituye a la ecuación diferencial del oscilador armónico cuando existe un fenómeno disipativo, caracterizado por la constante  $\tau$ . Escrita esta ecuación así, describe el comportamiento de cualquier

oscilador de la clase que sea, dependiendo de lo que represente  $x$ , distancia ángulo, tensión, carga eléctrica, ... ; para cualquier clase podremos definir  $\omega_0$  y  $\tau$ .

Anteriormente hemos visto que la función  $A_0 e^{j(\omega t + \phi)}$  era solución de la ecuación diferencial del MAS y su parte real

$$\Re [ A_0 e^{j(\omega t + \phi)} ] = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

era la ecuación del MAS. Como la ecuación diferencial que tenemos ahora es también lineal, podemos repetir el procedimiento de ensayar la función exponencial compleja como solución. Esperemos, pues, que una función de la forma

$$x = \Re [ C e^{j\Omega t} ] \quad (2.5)$$

sea solución de la ecuación 2.4, siendo  $C$  una amplitud compleja. Esta función satisfará la ecuación 2.4, supuesto que  $\Omega$  satisfaga la ecuación de segundo grado

$$\Omega^2 - j(1/\tau)\Omega - \omega_0^2 = 0 \quad (2.6)$$

Esta ecuación proporciona dos soluciones independientes, salvo en el caso en que tenga una raíz doble:

$$\Omega_+ = j\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \quad (2.7)$$

$$\Omega_- = j\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \quad (2.8)$$

Podemos considerar tres casos separadamente, según los valores relativos de  $\omega_0$  y  $1/2\tau$ . Estos casos reciben los nombres de: amortiguamiento débil, si  $\omega_0 > 1/2\tau$ , sobreamortiguamiento si  $\omega_0 < 1/2\tau$  y amortiguamiento crítico si  $\omega_0 = 1/2\tau$ . Resulta cómodo introducir el número adimensional  $Q = \omega_0\tau$ , que depende únicamente de los parámetros físicos que definen el oscilador. Recibe el nombre de factor de calidad del oscilador y posteriormente veremos su interés, así como una definición general. Utilizando  $Q$ , habrá amortiguamiento débil si  $Q > 0,5$ , amortiguamiento crítico si  $Q = 0,5$  y sobreamortiguamiento si  $Q < 0,5$ .

## 2.2 Amortiguamiento débil

Introducimos la cantidad  $\omega$ , que tiene dimensiones de frecuencia y tal que

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} \quad (2.9)$$

En la solución  $\Omega_+$  el exponente de la función solución  $x$ , será

$$j\Omega_+ t = j(j\frac{1}{2\tau} + \omega) t = (-\frac{1}{2\tau} + j\omega) t$$

como  $-1/2\tau$  es real, la solución es de la forma

$$x = e^{-t/2\tau} \operatorname{Re} [ C e^{j\omega t} ]$$

que podemos escribir

$$x = e^{-t/2\tau} ( A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t ) \quad (2.10)$$

Se puede ver que la solución  $\Omega_+$ , da un tipo de solución de la misma forma. Las constantes de integración  $A$  y  $B$  se determinan con las condiciones inicial es del movimiento. Así, en función de  $x(0)$  y de  $(dx/dt)_{t=0} = v(0)$

$$x(0) = A$$

$$v(0) = \frac{-x(0)}{2\tau} + \omega B$$

se tiene

$$x(t) = e^{-t/2\tau} \left( x(0) \cos \omega t + \left( v(0) + \frac{x(0)}{2\tau} \right) \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega} \right) \quad (2.11)$$

En la figura 2.1 se muestra  $x(t)$  para un oscilador con  $\omega = 5 \operatorname{rad} \cdot \operatorname{s}^{-1}$  y  $\tau = 2 \operatorname{s}$ ; las condiciones iniciales son tales que  $x(0) = 2$ , en unidades arbitrarias (ua) y  $v(0) = 0$

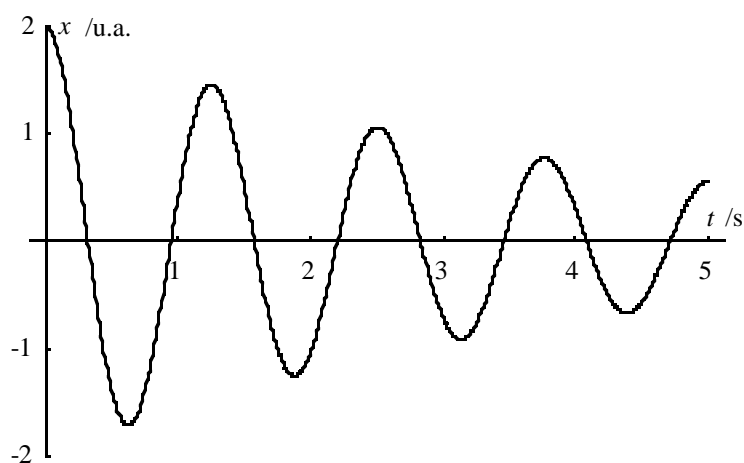


Fig. 2.1

La figura 2.2 corresponde al mismo oscilador pero habiendo cambiado las condiciones iniciales. En este caso  $x(0) = 0$  ua y  $v(0) = 10 \operatorname{ua} \cdot \operatorname{s}^{-1}$



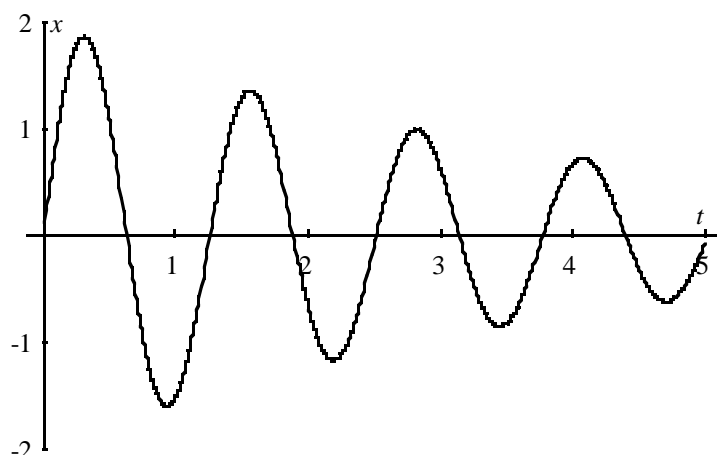


Fig. 2.2

Podemos escribir  $x(t)$  de una forma alternativa. Veamos una forma de llegar a ella. Tomemos una combinación lineal de las dos funciones correspondientes a las soluciones  $\Omega_+$  y  $\Omega_-$ .

$$x(t) = C_1 e^{-t/2\tau} e^{j\omega t} + C_2 e^{-t/2\tau} e^{-j\omega t} = e^{-t/2\tau} (C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t})$$

Para que  $x(t)$  represente una realidad física debe ser real, por lo tanto debe serlo la expresión entre paréntesis. Esto se verifica si  $C_1 = C_2 = A_0 = \text{real}$ , también obviamente, si

$$C_1 = A_0 e^{j\phi} \quad \text{y} \quad C_2 = A_0 e^{-j\phi} \quad , \text{ con } A_0 = \text{real}$$

Tenemos una solución de la forma

$$x(t) = A_0 e^{-t/2\tau} (e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)})$$

o bien

$$x(t) = A_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi) \quad (2.12)$$

donde  $A_0$  y  $\phi$  son constantes a determinar mediante las condiciones iniciales. Si no existiera el término  $e^{-t/2\tau}$  la solución sería un MAS de frecuencia  $\omega$ , menor que la frecuencia  $\omega_0$  de la oscilación no amortiguada. Es decir, el rozamiento retarda el movimiento. La solución representa una oscilación de periodo  $T = 2\pi/\omega$ ; la consecuencia más importante del amortiguamiento está en que la amplitud decrece exponencialmente con el tiempo

$$A(t) = A_0 e^{-t/2\tau} \quad (2.13)$$

con una constante de tiempo igual a  $2\tau$ . En un periodo la amplitud decrece en un factor

$$\frac{A(t+T)}{A(t)} = e^{-T/2\tau}$$

tomando logaritmos tenemos

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{2\tau}{T} = \delta \quad (2.14)$$

este logaritmo de la relación entre la amplitud en un instante y la amplitud después de un periodo, recibe el nombre de decremento logarítmico. Su medida en una gráfica de la oscilación permite el cálculo del tiempo de relajación del oscilador. Para que la medida sea más precisa es mejor comparar las amplitudes para un número mayor de periodos; para  $n$  periodos

$$n \delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+nT)}$$

Calculemos, ahora, el tiempo  $t^*$ , que tardaría un oscilador en reducir su amplitud a un 2% de su valor inicial, sería

$$t^* = 2 \tau \ln \frac{100}{2} = 7,8 \tau$$

y el número de oscilaciones que realizaría en ese tiempo sería

$$\frac{t^*}{T} = 2 \tau \ln 50 \frac{\omega}{2\pi} = 1,2 \tau \omega$$

Si, por ejemplo,  $1/2\tau = 0,1\omega_0$ , o lo que es equivalente  $Q = 5$ , el número de oscilaciones vale aproximadamente 6.

Podemos dar otra expresión de  $\omega$ , introduciendo el número adimensional  $Q = \omega_0\tau$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_0^2\tau^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (2.15)$$

vemos que es necesario que  $Q > 0,5$  para que sea  $\omega$  real. Para  $Q \gg 1$ , se puede tomar  $\omega$  aproximadamente igual a  $\omega_0$ . En la figura 2.3 se observa como  $\omega$  tiende rápidamente a valer  $\omega_0$  para  $Q > 1$ .

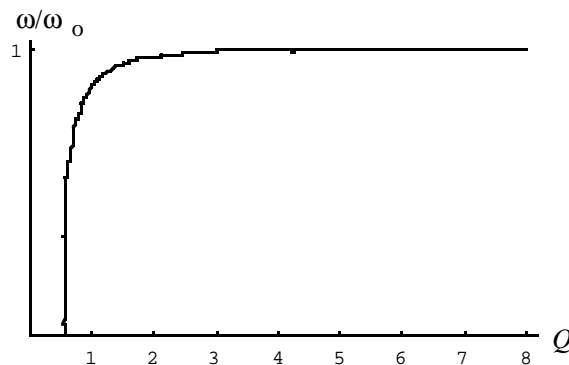


Fig. 2.3

En la tabla 2.1 podemos ver el error que se comete al tomar  $\omega_0 = \omega$ , según el valor de  $Q$ .

Tabla 2.1

$Q$	error%
2	3
5	0,5
10	0,13
25	0,02

### 2.3 Casos sobreamortiguado y crítico

#### 2.3.1 Caso sobreamortiguado

En este caso  $\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} < 0$  y por lo tanto  $\Omega_+$  y  $\Omega_-$  son raíces imaginarias puras, con lo que la forma exponencial de la solución es real para ambas raíces. Introduciendo la cantidad

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} < \frac{1}{2\tau}$$

escribimos

$$e^{j\Omega_+ t} = e^{j(j/2\tau + j\beta)t} = e^{-(\beta + 1/2\tau)t}$$

y

$$e^{j\Omega_- t} = e^{-(-\beta + 1/2\tau)t}$$

tanto  $\beta + 1/2\tau$  como  $-\beta + 1/2\tau$  son positivos y por lo tanto ambos exponentiales son decrecientes. La solución general de la ecuación diferencial del movimiento será combinación lineal de las dos soluciones halladas

$$x = A e^{-(\beta + 1/2\tau)t} + B e^{-(-\beta + 1/2\tau)t} \quad (2.16)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes a determinar con las condiciones iniciales. El sistema no oscila, vuelve a la posición de equilibrio sin sobrepasarla.

#### 2.3.2 Amortiguamiento crítico

En este caso  $\Omega_+$  y  $\Omega_-$  corresponden a una raíz doble, imaginaria pura

$$\Omega_+ = \Omega_- = j \frac{1}{2\tau}$$

y según esto sería

$$x = \text{Re} [ C e^{j(j/2\tau)t} ] = A e^{-t/2\tau}$$

con  $A$  real. Esta solución, sin embargo, sólo tiene una constante de integración,  $A$ , y debe haber dos en la solución general. No trataremos un método general de solución sino que tomaremos la solución general de la oscilación amortiguada, ecuación 2.11, teniendo en cuenta que este tercer caso podemos tomarlo como límite de la oscilación amortiguada cuando  $\omega$  tiende a cero. Así tomando los límites

$$\cos\omega t \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \frac{\text{sen}\omega t}{\omega} \rightarrow t$$

tenemos

$$x(t) = e^{-t/2\tau} \left[ x(0) + \left( v(0) + \frac{x(0)}{2\tau} \right) t \right] \quad (2.17)$$

de la forma  $e^{-t/2\tau}[A + B t]$ , pero en donde las constantes de integración  $A$  y  $B$  están escritas, ya, en función de las condiciones iniciales. En la figura 2.4 se muestra un caso de amortiguamiento crítico para un sistema de  $\tau = 2\text{s}$ , con las siguientes condiciones iniciales  $x(0) = -3\text{ cm}$  y  $v(0) = 5\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ .

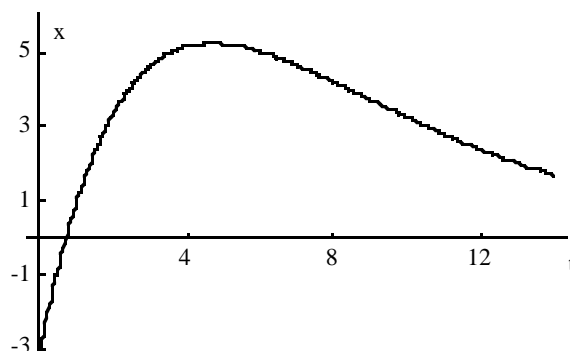


fig. 2.4

### Ejemplo 2.1

Un cuerpo de masa  $m = 0,200\text{ kg}$ . está suspendido del techo mediante un muelle. La fuerza que realiza el muelle al ser estirado una longitud  $z$  a partir de su longitud sin deformar es  $F_e = -kz$ , donde  $k = 29,0\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . El cuerpo está sumergido en un fluido viscoso que amortigua el movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad:  $F_v = -b\cdot v$ . Tener en cuenta el peso del cuerpo, tomando  $g = 9,80\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

- Escribir la ecuación diferencial que rige el movimiento  $z(t)$  del cuerpo, y la solución general de esta ecuación, considerando todos los casos posibles en función del valor de  $b$ .
- Si  $b = 0,40\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ , hallar la expresión  $z(t)$  y representarla gráficamente, describiendo los parámetros más importantes, si las condiciones iniciales son  $z(0) = -3,27\text{ cm}$  y  $v(0) = 0,424\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .
- Si el valor del coeficiente de la fuerza viscosa es  $b = 8,0\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ , hallar el movimiento del cuerpo si las condiciones iniciales son  $z(0) = -6,8\text{ cm}$  y  $v(0) = 0,60\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

### Solución

a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, tomando el sentido positivo de las  $z$  hacia arriba, son:

$$F_e = -kz \quad ; \quad F_v = -bv \quad ; \quad p = -mg$$

todas en la dirección  $z$ . Según la segunda ley de Newton  $\Sigma \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$ , de donde

$$- (kz + bv + mg) = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

o bien

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z + g = 0 \quad (2.18)$$

donde

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La ecuación 2.18 puede escribirse

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 \left( z + \frac{g}{\omega_0^2} \right) = 0$$

si hacemos  $z' = z + \frac{g}{\omega_0^2}$ , y como  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt}$  y  $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}$ , la ecuación puede escribirse

$$\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz'}{dt} + \omega_0^2 z' = 0 \quad (2.19)$$

obsérvese que

$$\frac{g}{\omega_0^2} = \frac{mg}{k}$$

corresponde a un desplazamiento igual a la deformación del muelle en la posición de equilibrio estático

$$- kz_{\text{eq}} - mg = 0$$

de donde

$$z_{\text{eq}} = - \frac{mg}{k} = - \frac{0,2 \cdot 9,8}{29} = 6,76 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Si una función  $z'$  es solución de la ecuación diferencial lineal homogénea 2.19

$$z = z' - \frac{g}{\omega_0^2}$$

será solución de la 2.18, donde  $z'$  es una solución general de la ecuación homogénea correspondiente a 2.18 y  $-\frac{g}{\omega_0^2}$  es una solución particular.

Así el problema es hallar la solución de una ecuación del tipo 2.19. El tipo de solución depende, según hemos visto, de los valores relativos de  $\omega_0$  y  $1/2\tau$ . Las dos aplicaciones numéricas que siguen contemplan los casos siguientes:

b) Si  $b = 0,40 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \frac{29}{0,2} - \frac{0,4^2}{4\cdot 0,2^2} = 144 > 0$$

la solución es del tipo  $z = z' + A_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi)$ , sustituyendo

$$z = -0,068 + A_0 e^{-t} \cos(12t + \phi)$$

Donde  $A_0$ , y  $\phi$  son las constantes de integración que se determinan mediante las condiciones iniciales.

$$z(0) = -3,27 \cdot 10^{-2} = 0,068 + A_0 \cos \phi$$

$$v(0) = 0,424 = -A_0 \cos \phi - 12A_0 \sin \phi$$

resolviendo el sistema

$$A_0 = 5,2 \text{ cm}, \quad \phi = -48^\circ$$

y por tanto,

$$z = -0,068 + 0,052 e^{-t} \cos(12t - 48^\circ)$$

c) Si  $b = 8,0 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ , se tiene

$$\frac{1}{2\tau} = \frac{b}{2m} = \frac{8}{2\cdot 0,2} = 20 \text{ s}^{-1}$$

y

$$\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} = 145 - 400 = -255 < 0$$

La solución corresponde al caso sobreamortiguado, con  $\beta = \pm \sqrt{255} \approx \pm 16$ . La solución general será de la forma

$$z = -0,068 + A e^{-(16+20)t} + B e^{-(-16+20)t} = -0,068 + A e^{-36t} + B e^{-4t}$$

Las condiciones iniciales nos dan:  $z(0) = -0,068 = -0,068 + A + B$ , de donde

$$A = -B$$

y  $v(0) = 0,6 = -36A - 4B$ , de donde

$$A = -B = -0,019 \text{ m}$$

y por tanto

$$z = -0,068 + 0,019 [e^{-4t} - e^{-36t}]$$


---

**Ejemplo 2.2**

Un acelerómetro, constituido por un sistema masa-muelle, se fija a un vehículo en la dirección de su movimiento, figura 2.5.a.

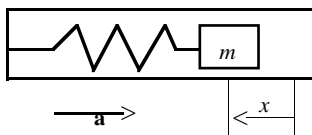


Fig. 2.5.a

a) Si el vehículo avanza con una aceleración constante  $a$ , demostrar que la deformación,  $x$ , del muelle es proporcional a la aceleración. Determinar la constante de proporcionalidad en función de los parámetros del sistema.

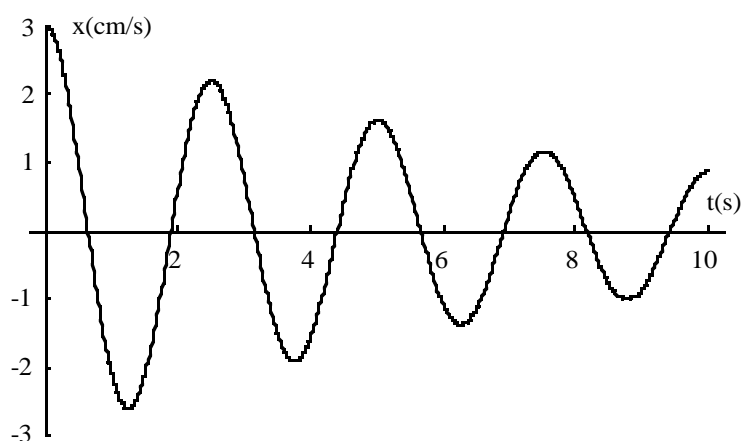


Fig. 2.5.b

b) En un instante dado,  $t = 0$ , el vehículo desacelera bruscamente desde  $a$  hasta  $0 \text{ ms}^{-2}$ . La masa realiza entonces un movimiento  $x(t)$ , que queda registrado en la gráfica de la figura 2.5.b. Determinar numéricamente el período propio del acelerómetro, el tiempo de relajación,  $\tau$ , del sistema y el factor de calidad del mismo.

**Solución**

a) Si el vehículo mantiene una cierta aceleración constante, es de esperar que la masa del acelerómetro tenga dicha aceleración después de haber transcurrido cierto tiempo. Pero la única fuerza horizontal que actúa sobre esta masa es la fuerza,  $F_m$ , que ejerce el muelle, puesto que al moverse a la misma velocidad que el vehículo las fuerzas viscosas son nulas. Por lo tanto

$$F_m = ma$$

Ahora bien, si el comportamiento del muelle cumple la ley de Hooke, el muelle se deformará proporcionalmente a la fuerza, por lo que  $F_m = -kx$ , siendo  $x$  el desplazamiento de la masa respecto a su punto de equilibrio. Por lo tanto:

$$ma = F_m = -kx$$

de donde

$$a = -\frac{k}{m}x$$

La constante de proporcionalidad es  $-k/m$ , donde el signo menos indica que cuando el vehículo acelera en una dirección, la masa se desplaza en sentido contrario.

b) Según podemos estimar en la figura, para realizar tres oscilaciones completas necesita un tiempo de  $8,2 - 0,6 = 7,6$ s, por lo que el período es

$$T = 7,6/3 = 2,5 \text{ s}$$

y la frecuencia angular o pulsación

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

En  $3T = 7,6$  s, la amplitud ha pasado de ser igual a 3 cm a ser igual a 1,2 cm, por lo que

$$3\delta = \ln \frac{3}{1,2}$$

y de la ecuación 2.14

$$\tau = \frac{T}{2\delta} = \frac{7,6}{2 \ln \frac{3}{1,2}} = 4 \text{ s}$$

El tiempo de relajación  $\tau$  vale 4s. Dado que la amortiguación no es muy importante, la frecuencia,  $\omega$ , calculada coincide, en buena aproximación, con la frecuencia propia del oscilador,  $\omega_0$  y el factor de calidad  $Q = \tau\omega_0 = 4 \cdot 2,5 = 10$

## 2.4 Energía de un oscilador débilmente amortiguado

En el MAS la energía era una magnitud que se conservaba; en un oscilador amortiguado la *fuerza viscosa* produce una degradación de la energía. La potencia disipada será

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2$$

tomemos el caso de un oscilador mecánico

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 = -\frac{2b}{m} \frac{mv^2}{2} = -\frac{2}{\tau} E_k$$



en valor medio para un ciclo

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{2}{\tau} \langle E_k \rangle \quad (2.20)$$

Si el sistema es tal que  $Q \gg 1$ , el amortiguamiento es pequeño y podemos tomar el movimiento como armónico simple durante unos cuantos ciclos. Entonces, al igual que en un MAS, podemos tomar  $2\langle E_k \rangle = \langle E \rangle$ , y por tanto

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau} \langle E \rangle$$

e integrando

$$\langle E \rangle = \langle E \rangle_0 e^{-t/\tau} \quad (2.21)$$

Para fijar ideas de la aproximación realizada, consideremos de nuevo la energía mecánica de la partícula como suma de las energías cinética y potencial; en este orden de aproximación  $\omega \approx \omega_0$

$$E = E_k + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

derivando respecto al tiempo  $x(t) = A_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi)$ , elevando al cuadrado y sustituyendo, se obtiene para la energía cinética

$$E_k = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-t/\tau} \left\{ \frac{1}{4\tau^2} \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{\omega}{2\tau} \sin 2(\omega t + \phi) \right\}$$

En la figura 2.6 se muestra la gráfica de la energía cinética de un oscilador en el que  $\tau = 2s$  y  $Q = 10$

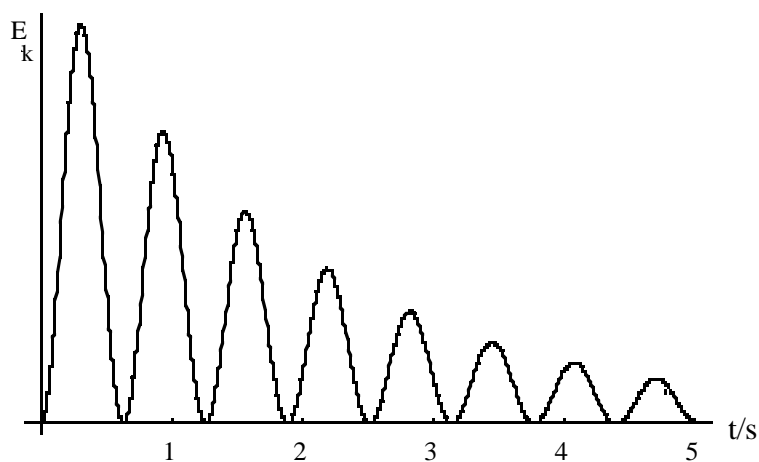


Fig. 2.6

Elevando  $x$  al cuadrado y sustituyendo en la expresión de la energía potencial, se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau} \cos^2(\omega t + \phi)$$

En la figura 2.7 se muestra la gráfica de la energía potencial del mismo oscilador que en la figura 2.6

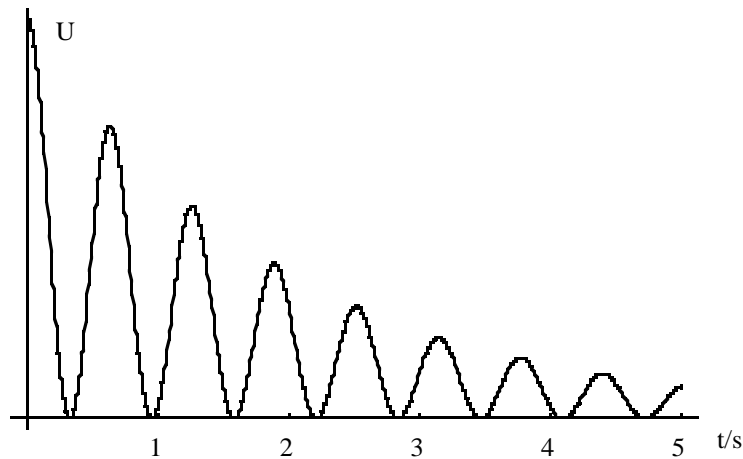


Fig. 2.7

sumando las expresiones de ambas energías

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau} \left\{ \left( \frac{1}{4Q^2} \cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2Q} \sin 2(\omega t + \phi) \right) + \cos^2(\omega t + \phi) \right\}$$

Esta suma es la que se muestra en la figura 2.8 en la que se puede observar un decrecimiento exponencial al que se superpone un cierto *rizado*.

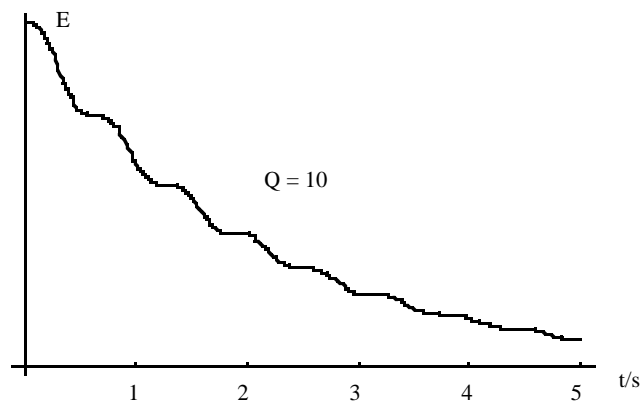


Fig. 2.8

Este rizado disminuye al aumentar el factor de calidad del oscilador. En la figura 2.9 se muestra la energía de un oscilador de  $Q = 20$  y el mismo  $\tau$  que en la figura 2.8, para poder compararlas mejor. Se puede observar la disminución de la amplitud del rizado.

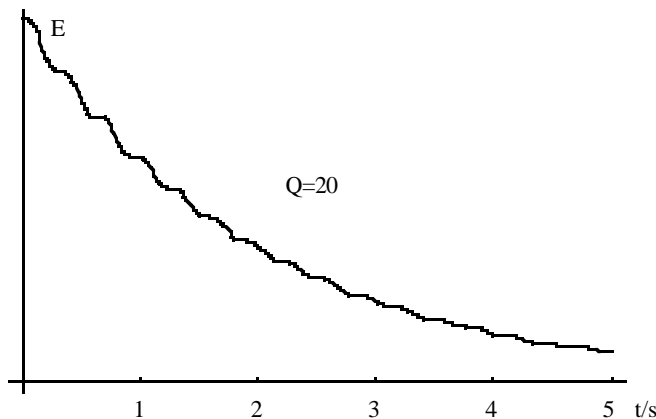


Fig. 2.9

En una primera aproximación podemos despreciar el término en  $Q^2$  frente a los otros

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau} \left\{ 1 + \frac{1}{2Q} \text{sen} 2(\omega t + \phi) \right\}$$

donde vemos que la amplitud del rizado viene determinada por  $1/2Q$ . Así, si el factor de calidad es grande, o lo que es lo mismo si el amortiguamiento es débil, podemos tomar

$$E(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau} = E(0) e^{-t/\tau}$$

es decir, si  $Q \gg 1$ , la energía puede considerarse constante durante cualquier ciclo, pero decrece exponencialmente en un intervalo de tiempo que suponga muchos ciclos. Observemos que en un tiempo  $t = \tau$  la energía queda dividida por e.

Veamos como  $Q = \omega_0 \tau$  nos da la misma idea de la rapidez de pérdida de energía, pero expresada en número de oscilaciones. Si  $n$  es el número de ciclos en un tiempo  $\tau$

$$\tau = nT = n \frac{2\pi}{\omega_0}$$

así, después del número de ciclos realizados en el tiempo de relajación  $\tau$ ,  $n = Q/2\pi$ , la energía vale

$$E(nT) = E(0) e^{-1}$$

Podemos dar ahora una definición general del número adimensional  $Q$ , al que llamamos factor de calidad del oscilador

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía almacenada}}{\text{energía perdida por ciclo}} = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{|\langle \frac{dE}{dt} \rangle| T} \tag{2.22}$$

que para amortiguamiento débil podemos escribir como

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\frac{\langle E \rangle}{\tau} T} = \frac{2\pi}{T} \tau = \omega_0 \tau$$

que corresponde a la definición dada inicialmente.

**Ejercicio 2.1** .....

Una partícula de masa  $m = 2,0$  kg, que puede moverse en el eje  $Ox$ , está sometida a dos fuerzas:  $F_1(x) = -kx$  y  $F_2(v) = -bv$ , donde  $k = 8,0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  y  $b = 0,2 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ .

- a) Obtener la ecuación de movimiento,  $x(t)$ .
- b) ¿Cómo evoluciona la energía mecánica de la partícula?.

**R:**a)  $x(t) = A_0 e^{-0,05t} \cos(2t + \phi)$ , donde  $A_0$  y  $\phi$  son constantes reales a determinar con las condiciones iniciales no dadas en el enunciado del ejercicio. Una solución de este tipo representa una oscilación libre amortiguada.

b) La energía mecánica de la partícula será la suma de las energías cinética y potencial; en nuestro caso  $Q = 20$ , el amortiguamiento es débil y podemos tomar

$$E(t) = E(0) e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-t/\tau} = 4,0 A_0^2 e^{-0,1t}$$

**Ejercicio 2.2** .....

Un oscilador tiene un periodo  $T = 2,0$  s. Su amplitud disminuye en un 2,0% cada ciclo.

- a) ¿Qué fracción de la energía del oscilador se disipa en cada ciclo?
- b) Calcular el tiempo de relajación del sistema y el factor de calidad del mismo.

**R:**a) 4% ; b)  $\tau = 49$  s ;  $Q = 1,6 \cdot 10^2$

**Ejemplo 2.3** .....

Una esfera de radio  $R = 2,0$  cm y densidad  $\rho = 3,0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , está sujeta a un muelle de constante  $k = 0,80 \text{ N}\cdot\text{cm}^{-1}$  y colgada verticalmente del techo. El sistema masa-muelle se introduce en un tubo muy largo que contiene agua, siendo el coeficiente de amortiguamiento viscoso,  $b = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ .

- a) ¿Cómo se moverá la masa, en estas condiciones?
- b) Calcular la energía inicial si la esfera ha iniciado su movimiento partiendo del reposo, desde una posición  $x = 10$  mm, por encima de su posición de equilibrio.
- c) ¿Qué fracción de energía le quedará al sistema 4,0 s después de iniciado el movimiento?
- d) Calcular el valor que tiene el factor de calidad  $Q$ .

**Solución**

a) Llamando  $x'$  a la elongación del muelle, respecto al equilibrio cuando no está suspendida la masa, y tomando el sentido positivo hacia abajo, la segunda ley de Newton nos dice que

$$-kx' - bv + mg = ma$$

esta ecuación permite ver una posición de equilibrio para  $kx'_0 = mg$ , (haciendo  $a = v = 0$ ), de manera que podemos medir los desplazamientos de la masa respecto a esta posición de equilibrio,  $x = x' - x'_0$   
Sustituyendo en la ecuación anterior

$$-k(x + x'_0) - bv + mg = ma$$

de donde, simplificando

$$-kx - bv = ma$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

que es la ecuación diferencial de un movimiento oscilatorio amortiguado.

b) Como parte del reposo

$$E(0) = U(0) = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} 0,8 \cdot (-10 \cdot 10^{-3})^2 = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

c) En un oscilador amortiguado, la energía total media decrece exponencialmente en el tiempo, según la expresión

$$\langle E \rangle = E(0) e^{-t/\tau}$$

donde el tiempo de relajación,  $\tau$ , vale

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{\rho V}{b} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi(2 \cdot 10^{-2})^2}{3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} = 4,0 \text{ s}$$

Para  $t = 4,0$  s le quedará una energía total media

$$\langle E \rangle = E(0) e^{-4/4} = E(0) e^{-1}$$

siendo la fracción de energía que le queda

$$\frac{\langle E \rangle}{E(0)} 100 = \frac{100}{e} = 37\%$$

d) El factor de calidad  $Q$  será

$$Q = \omega_0 \tau = \sqrt{\frac{k}{m}} \tau = \sqrt{\frac{0,8 \cdot 10^2}{10^{-1}}} \cdot 4 = 113$$

**Ejercicio 2.3**

Una masa de 2,0 kg. oscila sujeta a un muelle elegido de tal forma que la masa realiza 20 oscilaciones completas en 10,0 s con un amortiguamiento despreciable.

a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento, con los coeficientes expresados en unidades del S.I. Se añade un sistema de amortiguamiento tal que la fuerza asociada es proporcional a la velocidad. Se observa que la amplitud del movimiento decrece de 0,10 m a 0,05 m en cuatro ciclos.

b.1) Calcular el tiempo de relajación,  $\tau$ , del sistema y la frecuencia de oscilación.

b.2) Si 0,10 m es la amplitud inicial siendo nula la velocidad en ese instante, escribir la función que describe el movimiento.

Estimar :

c.1) ¿En qué instante, del primer ciclo de oscilación, la potencia disipada es máxima?

c.2) ¿Cuál es dicha potencia máxima?

c.3) ¿Cómo varía la relación entre la energía al inicio de un ciclo y la que se pierde en ese ciclo, al aumentar el número de ciclos que el sistema ha oscilado?

c.4) ¿Cuál es la energía disipada en el primer ciclo?

**R:**

b)  $\tau = 1,4 \text{ s}$  ,  $\omega = 12,6 \text{ rad s}^{-1}$ ; c)  $P_{\text{max}} = 2 \text{ W}$  ;  $\Delta E = 0,46 \text{ J}$ .

**Ejercicio 2.4**

La gráfica de la figura 2.10 muestra el desplazamiento,  $x(t)$ , de la masa,  $m= 100\text{g}$ , de un sistema masa-muelle. Los desplazamientos,  $x$ , vienen dados en centímetros y los tiempos en segundos.

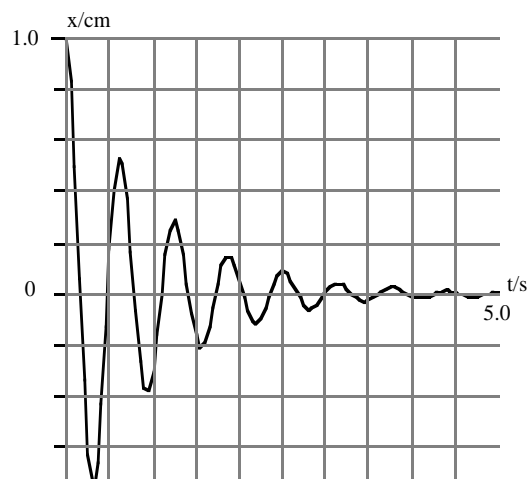


Fig. 2.10

Determinar:

a) La frecuencia  $\omega$  de la oscilación, el tiempo  $\tau$  de relajación del sistema y la ecuación del movimiento

b) ¿Qué error se cometería al tomar como frecuencia de la oscilación la propia o natural del sistema?

c) ¿Qué porcentaje de su energía pierde en el primer ciclo de la oscilación?. Estimar el factor de calidad de este oscilador

**R:**

a)  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\tau = 0,5 \text{ s}$ ,  $x(t) = 1,0 e^{-t} \cos 10t$ ; b) 5‰; c) 71%,  $Q = 5$

b) 5 ‰; c) 71%,  $Q=9$

## 2.5 Circuito RLC

En una oscilación armónica simple, la carga del condensador oscilaría indefinidamente. En cualquier situación real se observa que la amplitud decrece con el tiempo, es decir siempre existen fenómenos irreversibles (radiación, resistencia, ...) que disipan una cantidad de energía del oscilador, amortiguando la oscilación. Estos fenómenos son, generalmente, de interpretación complicada y varía según el sistema objeto de estudio. La forma más simple de traducirlos es mediante la introducción de la resistencia óhmica del circuito en la que se produce una caída de potencial igual a  $Ri$ .

La ecuación diferencial tipo es, ahora, de la forma

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

dividiendo ambos miembros por  $L$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

haciendo

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\tau} \quad \text{y} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

donde  $\tau$  es una constante que tiene dimensiones de tiempo y  $\omega_0$  corresponde a la frecuencia que tendría el oscilador en ausencia de resistencia, todo ello en exacta analogía con un oscilador mecánico, tenemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2.23)$$

las soluciones de la ecuación 2.23 son las mismas que las vistas en el oscilador mecánico. El circuito RLC oscilará si  $1/LC > R^2/4L^2$ , en cuyo caso lo hará con una frecuencia

$$\omega = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \quad (2.24)$$

Como  $R/L$  tiene dimensiones de frecuencia,  $L\omega$  tiene dimensiones de resistencia y se mide en ohmios. Como dimensionalmente  $[L\omega] = [1/C\omega]$ , también  $1/C\omega$  se mide en ohmios.

La resistencia, "fuerza viscosa", produce un decrecimiento exponencial de la energía, análogamente al caso mecánico. Para un circuito oscilante

$$\text{Potencia disipada} = \frac{dU}{dt} = -Ri^2 = -\frac{2R}{L} \frac{Li^2}{2} = -\frac{2}{\tau} U_B$$

Si el sistema es tal que  $Q \gg 1$ , el amortiguamiento es pequeño y podemos tomar la oscilación como la de un oscilador armónico, de amplitud constante durante unos cuantos ciclos. Entonces, podemos tomar

y por tanto

$$2\langle U_B \rangle = \langle U \rangle$$

de donde

$$\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{\tau} \langle U \rangle$$

$$\langle U \rangle = \langle U \rangle_0 e^{-t/\tau}$$



### 3 Oscilaciones forzadas

#### 3.1 Introducción. Principio de superposición: excitación armónica

La energía de un oscilador libre amortiguado se ha disipado, prácticamente, al cabo de  $Q$  ciclos. Un problema que podemos plantearnos es cómo mantener esa oscilación, o de otra forma: cómo suministrar al oscilador una energía igual a la que va disipando.

Para ello tomemos un oscilador subamortiguado sometido a una fuerza exterior no nula  $F(t)$ .

De la segunda ley de Newton aplicada al oscilador

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (3.1)$$

Muchas funciones pueden desarrollarse en serie de Fourier, en particular todas las funciones periódicas que pueden significar algo físicamente. Así,

$$F(t) = \sum_{n=0}^n (a_n \cos n \omega t + b_n \operatorname{senn} \omega t)$$

por lo que si conocemos el comportamiento  $x(t)$  del oscilador para una sollicitación armónica,  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , podemos hallar su comportamiento ante una fuerza que sea combinación lineal de funciones armónicas. Esto se debe a la linealidad de la ecuación diferencial que nos permite aplicar el principio de superposición. Por lo tanto sólo consideraremos el caso de una fuerza exterior armónica,  $F_0 \cos \omega t$ , que a veces representaremos por

$$F_0 e^{j\omega t}$$

sabiendo que las respuestas con significado físico vendrán dadas por la parte real.

#### 3.2 Regímenes transitorio y permanente

La solución de la ecuación diferencial 3.1 es la suma de la solución general de la ecuación homogénea, ya estudiada, y de una solución particular. Hemos visto que cualquier tipo de solución de la homogénea es amortiguada: su amplitud es despreciable al cabo de un cierto tiempo (unos cuantos  $\tau$ ). Así que aquí nos vamos a interesar solamente por el estado de movimiento que resulta de la aplicación permanente de la fuerza excitadora armónica cuando todos los fenómenos transitorios han desaparecido. En las gráficas de las figuras 3.1.a y 3.1.b, se muestra la respuesta de un oscilador de  $\tau = 1$  s y frecuencia propia  $2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  excitado por una fuerza armónica de  $4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Las condiciones iniciales son diferentes,

pero se puede observar como transcurridos  $\approx 5\tau$  la respuesta es la misma en las dos situaciones; el sistema oscila a la frecuencia impuesta por la fuerza aplicada.

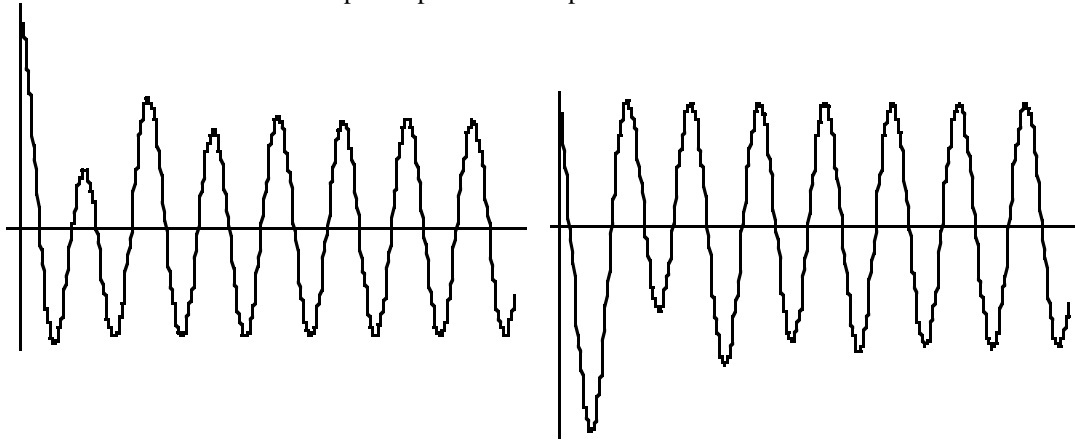


Fig. 3.1 a

Fig. 3.1 b

Este estado que queda, o régimen permanente, corresponde a una oscilación armónica de pulsación igual a la de la fuerza excitadora  $\omega$ , en general distinta de la propia  $\omega_0$  del oscilador. El estado de movimiento, correspondiente a la oscilación forzada en régimen permanente, viene expresado por la solución particular de la ecuación diferencial 3.1.

Para hallarla haremos uso de la propiedad siguiente: toda relación lineal entre números complejos se verifica igualmente entre sus partes reales. En nuestro caso, si una magnitud física viene representada por una función

$$x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

cualquier ley que haga intervenir una combinación lineal de  $x$ , queda satisfecha también por

$$X = x_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

cuya parte real  $\Re(X) = x$ . Recordando que la derivada es una operación lineal, podemos hallar la solución particular de la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (3.2)$$

la solución es una función armónica de frecuencia  $\omega$ ,  $x = A \cos(\omega t + \phi)$ . Para que sea solución de la ecuación 3.2 es necesario y suficiente que la función compleja

$$X = A e^{j(\omega t + \phi)}$$

sea solución de la ecuación compleja que corresponde a la 3.2

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + b \frac{dX}{dt} + kX = F_0 e^{j\omega t}$$

al final del cálculo sólo utilizaremos la parte real del resultado. Sustituimos

$$\frac{dX}{dt} = j\omega X \quad \text{y} \quad \frac{d^2 X}{dt^2} = -\omega^2 X$$

obteniendo

$$[-\omega^2 m + j\omega b + k] A e^{j\omega t} e^{j\phi} = F_0 e^{j\omega t}$$

el interés de esta transformación estriba, justamente, en que todos los términos que contienen el tiempo están en el factor común  $e^{j\omega t}$ , por lo tanto

$$A e^{j\phi} = \frac{F_0}{(-\omega^2 m + k) + j\omega b}$$

multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador

$$A e^{j\phi} = \frac{F_0}{(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega b)^2} [(-\omega^2 m + k) - j\omega b]$$

de donde igualando los módulos de los complejos de ambos miembros

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega b)^2}}$$

y de la igualdad de argumentos

$$\text{tg}\phi = \frac{-\omega b}{k - \omega^2 m}$$

en estas expresiones podemos introducir

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau} \quad \text{y} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

obteniendo

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad (3.3)$$

y

$$\text{tg}\phi = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.4)$$

Estos valores de  $A$  y  $\phi$  determinan la parte real de  $X$ , solución particular de la ecuación 3.2

$$x = \Re(X) = A \cos(\omega t + \phi)$$

### 3.3 Amplitud de la respuesta

La amplitud,  $A(\omega)$ , cuya expresión acabamos de obtener, toma los siguientes valores

$$A(\omega = 0) = \frac{F_0}{m \omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$A(\omega = \infty) = 0$$

presenta un máximo para una pulsación tal que el denominador de la expresión de  $A$  sea mínimo

$$\frac{d[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]}{d\omega} = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\frac{\omega}{\tau^2} = 0$$

de donde

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} = \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{2Q^2} \right]$$

Para esta frecuencia se dice que hay resonancia de amplitud entre el oscilador y la fuerza excitadora. La forma de la curva depende del factor de calidad,  $Q$ , del oscilador, como queda de manifiesto escribiendo  $A(\omega)$  en función de  $Q$  y la variable adimensional  $\omega/\omega_0$ ; multiplicando y dividiendo por  $\omega_0^2$ .

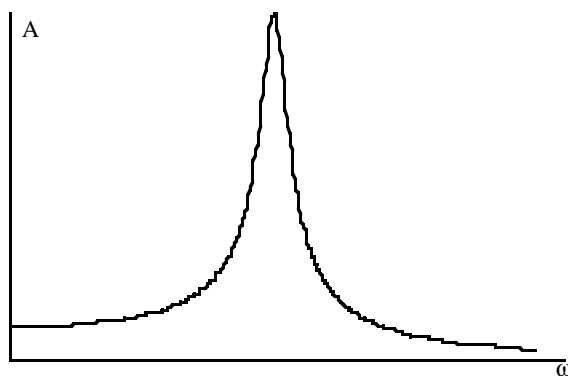
$$A = \frac{A(0)}{\sqrt{\left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^2 + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (3.5)$$

y para la frecuencia de resonancia obtenida

$$A_{\max} = A(0) \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (3.6)$$

y para  $\omega = \omega_0$

$$A(\omega_0) = A(0)Q \quad (3.7)$$



### 3.4 Estudio de la fase

La dependencia de la fase de las oscilaciones con la frecuencia excitadora viene dada por

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \quad (3.8)$$

El desplazamiento retarda siempre respecto a la fuerza excitadora. Para frecuencias bajas,  $\omega \ll \omega_0$ , la fase es casi nula. La respuesta está en fase con la excitación. A semejanza del equilibrio estático, la rigidez del muelle rige, casi completamente, la amplitud.

En torno de la resonancia y en amortiguamiento débil,  $Q \gg 1$ , el máximo de la amplitud (resonancia) es para  $\omega = \omega_0$ , y la amplitud  $A(\omega_0) = QA(0)$  se hace más importante cuanto menor es el amortiguamiento. Puede producirse la ruptura del sistema mecánico.

Para frecuencias altas,  $\omega \gg \omega_0$ , el desplazamiento está retrasado en  $\pi$  respecto a la excitación (oposición de fase). La amplitud  $F_0/m\omega^2$  queda, ahora, regida por la inercia.

#### Ejemplo 3.1

Una fuerza sinusoidal, de valor máximo 20 N y frecuencia angular 10 rad·s<sup>-1</sup>, impulsa una masa de 1,0 kg, que oscila unida a un muelle de  $k = 400$  N·m<sup>-1</sup>. El coeficiente de amortiguamiento viscoso es  $b = 2,0$  kg·s<sup>-1</sup>.

a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones?

b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia y cuál será, entonces, la amplitud de la oscilación?

#### Solución

a) Como en las oscilaciones forzadas, la amplitud del movimiento en régimen estacionario, viene dada por la ecuación 3.3, de los datos del enunciado obtenemos

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{1}} = 20 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

y

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$$

de donde

$$A = \frac{20/1}{\sqrt{(20^2 - 10^2)^2 + (10/0,5)^2}} = 6,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

b) En la figura 3.3 se muestra la variación de la amplitud al variar la frecuencia de la fuerza aplicada. Se produce la resonancia cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia propia del sistema, es decir cuando  $\omega = \omega_0 = 20 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . El valor de la amplitud es, entonces, aproximadamente máximo y valdrá,

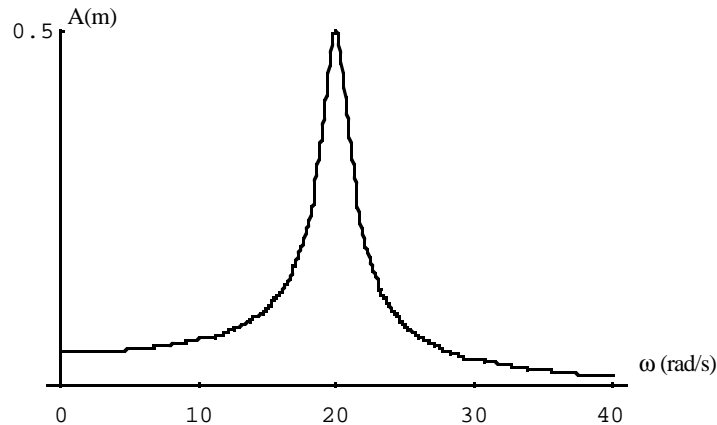


Fig. 3.3

$$A_m = \frac{F_0/m}{\omega_0/\tau} = \frac{20 \cdot 0,5}{20} = 0,5 \text{ m}$$

### Ejercicio 3.1 .....

La fuerza impulsora  $F(t) = 10\text{sen}\omega t$  N, donde  $\omega = 2\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , se aplica a una masa de 2,0 kg unida a un muelle de  $k = 200 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Si se puede considerar despreciable el amortiguamiento, calcular el periodo y la amplitud de las oscilaciones del sistema y el desfase entre la fuerza exterior y el desplazamiento.

**R:**

$T = 1 \text{ s}$  ,,  $A = 8,3 \text{ cm}$  ,,  $\phi = 0 \text{ rad}$

### Ejemplo 3.2 \_\_\_\_\_

Un sistema tiene una frecuencia natural, o propia, de oscilacion  $\omega_0$  y sufre oscilaciones forzadas con frecuencia  $\omega$ .

- Representar en una gráfica las energías cinética y potencial instantáneas del sistema, en la hipótesis  $\omega = \omega_0/2$ .
- En la misma gráfica, representar, aproximadamente, la energía total del sistema. ¿Sería constante para algún valor de  $\omega$ ?
- Representar, también, la energía cinética media y la potencial media.

**Solución**

a) La energía cinética viene dada por

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\text{sen}^2(\omega t + \phi)$$

y para  $\omega = \omega_0/2$

$$E_k(t) = \frac{1}{8}m\omega_0^2A^2\text{sen}^2(\omega t + \phi)$$

La energía potencial viene dada por

$$U(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

En la representación gráfica, figura 3.4 se ha tomado, en el eje de ordenadas, la energía normalizada, es decir la energía dividida por  $U_{\max} = m\omega_0^2 A^2 / 2$ .

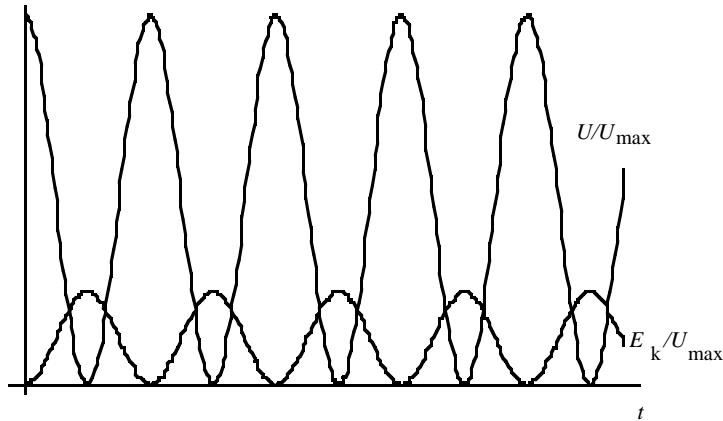


Fig. 3.4

b) La energía total será

$$E = E_k + U = \frac{1}{2} m A^2 [\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \phi)]$$

que varía con el tiempo, como se muestra en la figura 3.5. Sólo será constante si  $\omega = \omega_0$  en cuyo caso

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$$

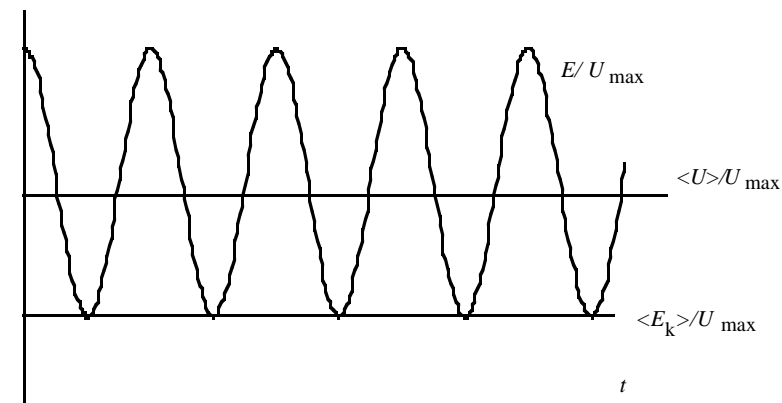


Fig. 3.5

c) Los valores medios de la energía cinética y potencial son

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{16} m \omega_0^2 A^2$$

y

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \langle \cos^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2$$

luego, para  $\omega = \omega_0/2$ , se tiene  $\langle U \rangle = 4\langle E_k \rangle$ .

### 3.5 Impedancia de un oscilador

La razón entre la fuerza excitadora y la velocidad de respuesta, definen la impedancia del oscilador. Las tres magnitudes deben expresarse en forma compleja. Así:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{V}} \quad (3.9)$$

Para determinar  $\mathbf{Z}$  tomemos la ecuación

$$m \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + b \frac{d\mathbf{X}}{dt} + k\mathbf{X} = F_0 e^{j\omega t}$$

en la que sustituimos

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = j\omega\mathbf{X} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = -\omega^2 \mathbf{X}$$

obteniendo

$$[-\omega^2 m + j\omega b + k]\mathbf{X} = F_0 e^{j\omega t} \quad (3.10)$$

Como

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = j\omega\mathbf{X}$$

si sustituimos el valor de  $\mathbf{X}$  obtenido de la ecuación 3.10

$$\mathbf{V} = j\omega\mathbf{X} = j\omega \frac{F_0 e^{j\omega t}}{-\omega^2 m + j\omega b + k} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{b + (m\omega - \frac{k}{\omega})j} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{Z}}$$

donde hemos introducido el complejo

$$\mathbf{Z} = b + \left[ m\omega - \frac{k}{\omega} \right] j \quad (3.11)$$



que relaciona la fuerza aplicada y la velocidad de respuesta y que hemos definido como impedancia del oscilador.

### 3.6 Intercambios de energía en un oscilador forzado

Supuesto el estado estacionario, la *potencia disipada* por el rozamiento viscoso viene dada por el producto de la fuerza viscosa,  $-bv(t)$ , por la velocidad,  $v(t)$ .

$$P = -bv(t) \cdot v(t) = -bv(t)^2 = -\frac{m}{\tau} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

El valor medio temporal de la potencia disipada, como

$$\langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sin^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{2}$$

valdrá

$$\langle P_{\text{disipada}} \rangle = \langle -bv(t)^2 \rangle = \frac{m}{\tau} \omega^2 A^2 \langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{2\tau}$$

La *potencia absorbida* instantánea en el estado estacionario vendrá dada por:

$$P = F(t) \cdot v(t) = F_0 \cos \omega t (-\omega A \sin(\omega t + \phi)) = -\omega A F_0 [\cos^2 \omega t \sin \phi + \cos \omega t \cdot \sin \omega t \cos \phi]$$

Como

$$\langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle = 0, \quad \text{y} \quad \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$$

la potencia consumida en promedio temporal, en el estado estacionario, es

$$\langle P \rangle = \frac{\omega A F_0}{2} \sin(-\phi)$$

Observemos que la velocidad instantánea tiene una componente en fase con la fuerza y otra defasada  $\pi/2$  con la misma. Sólo la componente en fase contribuye al promedio temporal de potencia. Sustituyendo en  $\langle P \rangle$  el valor de  $\sin(-\phi)$

$$\langle P \rangle = \frac{\omega A F_0}{2} \frac{A \omega / \tau}{F_0 m} = \frac{m \omega^2 A^2}{2\tau} \quad (3.12)$$

Coherentemente, en estado estacionario y en valor promedio, la potencia absorbida es igual a la disipada.

Observación:

La potencia es una relación no lineal (es un producto) y por lo tanto no puede aplicarse la correspondencia entre  $X$  y  $\Re(X) = x$ . Así, no puede aplicarse el formalismo complejo al cálculo de la potencia. Veamos

$$P = F(t) \cdot v(t) = F_0 \cos \omega t (-\omega A \sin(\omega t + \phi))$$

que es diferente de

$$\Re(FV) = \Re(F_0 e^{j\omega t} j\omega A e^{j(\omega t + \phi)}) = \Re(F_0 e^{j(2\omega t + \phi)} j\omega A) = F_0 \omega A \sin(2\omega t + \phi) \neq P$$

### 3.7 Estudio de la potencia absorbida en función de la frecuencia. Resonancia

De ahora en adelante sólo estudiaremos valores promedio temporal de la potencia así, y por simplificar, haremos  $\langle P \rangle \equiv P$

$$P = \frac{m \omega^2}{2\tau} A^2 = \frac{m \omega^2}{2\tau} \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

cuando la frecuencia de la fuerza impulsora coincide con la propia del sistema oscilante,  $\omega = \omega_0$ , la potencia alcanza su valor máximo  $P_{\max}$ , y se dice que hay resonancia

$$P_{\max} = P(\omega_0) = \frac{F_0^2 \tau}{2m} = \frac{F_0^2 Q}{2m\omega_0}$$

así escribiremos

$$P(\omega) = P_{\max} \frac{(\omega/\tau)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (3.13)$$

Observemos que la potencia tiende a cero tanto si la frecuencia tiende a cero como a frecuencias muy altas.

Con el fin de visualizar la agudeza de la curva de potencia, calculemos los valores de  $\omega$  para los que la potencia de entrada es la mitad de la máxima. Evidentemente esto sucede cuando el denominador es el doble del numerador, es decir cuando

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm \omega/\tau$$

de donde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4\tau^2}} \pm \frac{1}{2\tau}$$

en donde se han suprimido las raíces negativas, por falta de sentido físico. Podemos ponerlo en función del factor de calidad,  $Q$ , como

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2\tau}$$

Para  $Q \gg 1$ , o lo que es lo mismo cuando  $\tau \gg T$ , siendo  $T$  el periodo de las oscilaciones libres, podemos tomar como raíces

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2\tau}$$

y

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{1}{2\tau}$$

de aquí

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{1}{\tau} \quad (3.14)$$

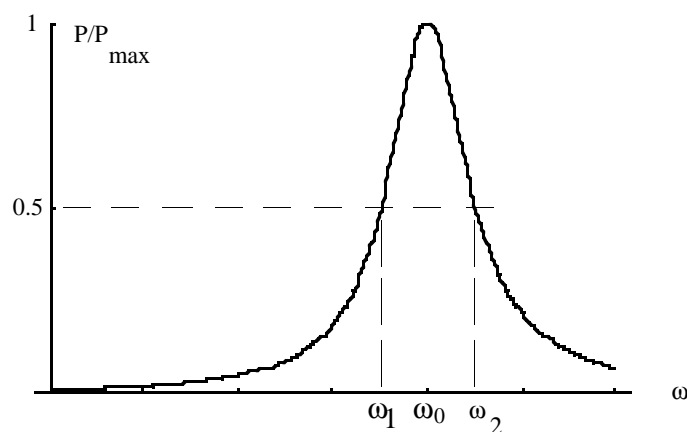


Fig. 3.6

Así, la anchura a media altura, como se muestra en la figura 3.6, de la curva de resonancia para el oscilador forzado es igual a la inversa del tiempo de relajación del oscilador libre.  $\Delta\omega$  suele recibir el nombre de ancho de banda.

El factor de calidad  $Q$  nos indica si las oscilaciones libres disminuyen rápida o lentamente y, también, si la resonancia es estrecha o no. La relación  $\Delta\omega = 1/\tau$  es además interesante porque es más fácil medir  $\Delta\omega$  que  $\tau$ .

Todo sistema físico que oscile en torno de un estado de equilibrio mostrando una pérdida exponencial con el tiempo de la energía, mostrará también una respuesta con resonancia ante una excitación exterior.

### Ejemplo 3.3

Las características de un oscilador amortiguado son:  $m = 0,40$  kg,  $k = 160$  N·m<sup>-1</sup>,  $b = 8,0$  kg·s<sup>-1</sup>. Sobre él actúa una fuerza impulsora,  $F(t) = 2,0\cos\omega t$  N, donde  $\omega = 30$  rad·s<sup>-1</sup>.

- Calcular la amplitud de las oscilaciones y el desfase entre la fuerza exterior y el desplazamiento.
- Determinar la energía disipada contra la fuerza resistente en un ciclo.
- Comprobar que la potencia media disipada en el medio viscoso es igual a la potencia media suministrada por la fuerza impulsora.

**Solución**

a) La amplitud, según la ecuación 3.3, vale

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} = \frac{2/0,4}{\sqrt{(\frac{160}{0,4} - 30^2)^2 + (\frac{30 \cdot 8}{0,4})^2}} = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

y el desfase

$$\text{tg}\phi = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{600}{-500} = 1,2$$

de donde

$$\phi = 50^\circ$$

b) La energía se disipa contra la fuerza de rozamiento viscoso

$$dE_d = F_r dx = F_r v dt = -bv \cdot v dt = -bv^2 dt$$

para un ciclo

$$\begin{aligned} E_d &= \int_t^{t+T} -bv^2 dt = -b \omega^2 A^2 \int_t^{t+T} \text{sen}^2(\omega t - \delta) dt = \\ &= -b \omega^2 A^2 \frac{T}{2} = -8 \cdot 30^2 (6,4 \cdot 10^{-3})^2 \frac{2\pi}{2 \cdot 30} = -4,8 \text{ J} \end{aligned}$$

c) La potencia media disipada es por lo visto en el apartado anterior

$$\langle P_d \rangle = -\frac{1}{2} b \omega^2 A^2$$

mientras que la potencia suministrada dada por la ecuación 3.12, es, sustituyendo  $\tau$

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 b$$

de igual magnitud que la potencia disipada. Las dos potencias, al ser opuestas, mantienen en equilibrio la energía media del oscilador en el régimen estacionario.

**Ejercicio 3.2** .....

Sobre la masa de un sistema masa-muelle actúa una fuerza variable  $F(t) = F_0 \text{sen}\omega t$ , donde  $F_0 = 0,3\text{N}$ . Los parámetros del sistema son  $m = 0,1 \text{ kg}$ ;  $k = 10 \text{ N/m}$ ;  $b = 0,2 \text{ kg/s}$ . Determinar:

a) Frecuencia de resonancia  $\omega_0$

b) Impedancia mecánica del sistema, en función de  $\omega$

c) Velocidad en función de  $\omega$  (dar módulo y fase respecto a la fuerza aplicada)

d) Posición en función de  $\omega$  (dar igualmente módulo y fase)

e) Potencia media disipada en función de  $\omega$

f) Aplicar numéricamente para  $\omega = 0$  ;  $\omega = \omega_0/2$  ;  $\omega = \omega_0$  ;  $\omega = 2\omega_0$

g) En que sentido se modificarían los resultados si no hubiese amortiguamiento

**R:**

f)  $v_0=0,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ;  $P = 0,004 \text{ W}$  (si  $\omega=\omega_0/2$  ó  $2\omega_0$ )

$v_0=1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ;  $P = 0,02 \text{ W}$  (si  $\omega=\omega_0$ )

### Ejemplo 3.4

La potencia media de entrada para mantener la oscilación de un cuerpo, en función de la frecuencia, se muestra en la gráfica de la figura 3.7. Si la amplitud de la fuerza impulsora es  $F_0=2,0 \text{ N}$ , determinar :

a) La frecuencia angular natural o propia del sistema  $\omega_0$

b) La potencia de entrada media máxima,  $P_0$ .

c) El tiempo de relajación del sistema,  $\tau$

d) El factor de calidad,  $Q$

e) La masa del cuerpo

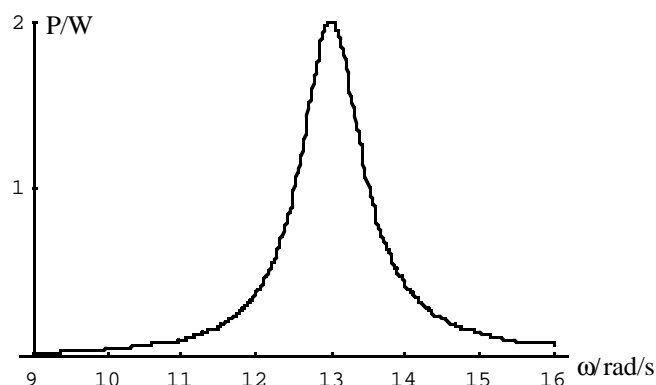


Fig. 3.7

f) La amplitud de la oscilación a la frecuencia de resonancia

g) La energía mecánica total del oscilador a la frecuencia de resonancia

Supongamos que el cuerpo está oscilando con la fuerza impulsora correspondiente a la frecuencia de  $12,5 \text{ s}^{-1}$ . Suprimimos de repente esta fuerza impulsora :

h) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la energía del sistema haya descendido a 1/e de su valor inicial?

i) ¿Cuántos ciclos de oscilación libre habrá realizado en ese tiempo?

j) Si nuestro sistema de medida no es capaz de registrar amplitudes menores que 1mm. ¿En cuánto tiempo se habrá detenido el sistema? ¿Cuántas oscilaciones habrá realizado?

### Solución

a) La potencia media absorbida por un oscilador forzado alcanza su valor máximo, como la velocidad, para el valor  $\omega = \omega_0$ ; de la observación de la gráfica  $\omega_0 = 13 \text{ rad/s}$ .

b) Por simple inspección de la gráfica,  $P_0 = 2 \text{ W}$ .

c) El ancho de frecuencia,  $\Delta\omega$ , definido como diferencia entre las dos frecuencias para las que la potencia de entrada  $P(\omega)$  al oscilador forzado, toma la mitad del valor máximo  $P_0$ , es igual al inverso del tiempo  $\tau$ , necesario para que las oscilaciones libres disminuyan a  $1/e$  de su energía inicial, o tiempo de relajación. Midiendo  $\Delta\omega$  en la gráfica,  $\Delta\omega = 13,5 - 12,5 = 1 \text{ s}^{-1}$ , de donde  $\tau = 1/\Delta\omega = 1 \text{ s}$ .

d) Definiendo el factor de calidad como  $Q = \omega_0\tau$ , se tiene que  $Q = 13$ .

e) La potencia máxima,  $P_0$ , viene dada por la expresión

$$P_0 = P_{\max} = P(\omega_0) = \frac{F_0^2\tau}{2m}$$

de donde se puede determinar la masa del cuerpo

$$m = \frac{F_0^2\tau}{P_0} = \frac{2^2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 1 \text{ kg}$$

f) Como  $Q = 13$  se puede considerar la frecuencia de resonancia igual a la frecuencia natural del sistema. La amplitud para  $\omega = \omega_0$  es

$$A(\omega_0) = \frac{F_0\tau}{m\omega_0} = \frac{2}{13} = 0,15 \text{ m}$$

g) Para  $\omega_0$  la energía del sistema permanece constante

$$E = \frac{F_0^2\tau^2}{2m} = 2 \text{ J}$$

h) La energía en las oscilaciones libre amortiguadas disminuye en el tiempo según  $E(t) = E(0)e^{-t/\tau}$ , por lo tanto para  $t = \tau = 1 \text{ s}$ , la energía  $E(1) = E(0)/e$ .

i) La frecuencia de la oscilación amortiguada que experimenta la masa al suprimir la fuerza impulsora es tal que

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$$

como en este caso  $1/(2\tau)^2$  es despreciable frente de  $\omega_0^2$ , podemos considerar  $\omega = \omega_0 = 13 \text{ rad/s}$  y de aquí

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi/\omega_0} = \frac{13}{2\pi} \approx 2 \text{ oscilaciones}$$

j) En estado estacionario la potencia media debe igualar al promedio de la potencia disipada por la fuerza viscosa

$$P = b \langle v^2 \rangle = \frac{m}{\tau} \langle v^2 \rangle = \frac{m}{\tau} \frac{\omega^2 A^2}{2}$$

La amplitud inicial que tendrán las oscilaciones vendrá fijada por el régimen estacionario forzado a  $\omega = 12,5 \text{ rad/s}$ , para el que la potencia media es  $P = 1 \text{ W}$

$$A = \sqrt{\frac{2\tau P}{m\omega^2}} = 0,11 \text{ m}$$

esta amplitud disminuirá en el tiempo según  $A(t) = A(0) e^{-t/2\tau}$  consideramos detenido el sistema cuando  $A \leq 10^{-3} \text{ m}$ , así

$$t = 2\tau \ln A(0) / A(t) = 2 \ln 110 \approx 9,4 \text{ s}$$

que supone un número de oscilaciones

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi/\omega_0} \approx 19 \text{ oscilaciones}$$

### Ejercicio 3.3

Se pretende estudiar las características de un sistema físico en equilibrio. Para ello, lo separamos ligeramente del equilibrio mediante dos tipos de excitación.

a) Se excita mediante una fuerza armónica  $F = F_0 \cos\omega t$ , con  $F_0 = 1,0 \text{ N}$ , de la que podemos variar la frecuencia. Se observa que la potencia media absorbida es máxima a una frecuencia  $\omega = 6,30 \text{ s}^{-1}$  y vale  $P = 1,0 \text{ W}$ .

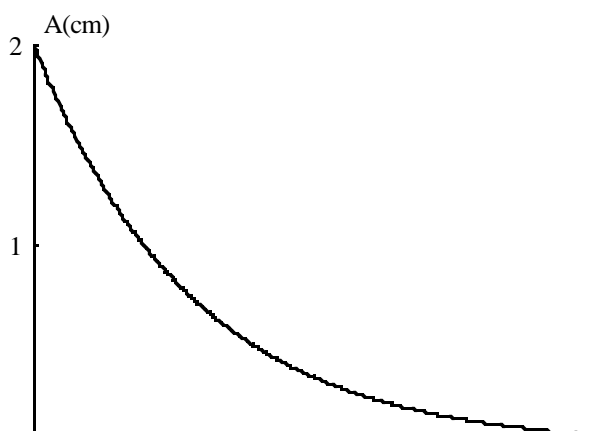


Fig. 3.8

b) Se excita mediante un impulso, observando que la amplitud de la oscilación decrece con el tiempo según se muestra en la figura 3.8.

Deducir de la información anterior, la masa  $m$ , el coeficiente elástico  $k$ , y el tiempo de relajación del sistema.

**R:**

$m = 0,5 \text{ kg}$ ;  $k = 0,2 \text{ N/cm}$ ;  $\tau = 0,9 \text{ s}$

.....

### Ejemplo 3.5

Suponer que al sistema anillo de carga  $-q$  y carga puntual  $q$ , del ejemplo 1.7, en lugar de un campo estacionario se aplica uno, también uniforme, pero dependiente del tiempo en la forma  $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \cdot \mathbf{i}$ , donde  $E_0$  cumple las mismas consideraciones de no afectar a la forma ni a la posición del anillo.

a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento de  $+q$

b) Escribir una solución de la anterior,  $x(E)$

c) Escribir el momento dipolar inducido,  $p(E)$

El sistema descrito puede tomarse como un modelo de oscilador atómico, en el que el orden de magnitud del factor  $Q$  es  $10^7$ .

d) Dar una explicación de cómo absorbe y/o emite energía este oscilador.

### Solución

a) La segunda Ley de Newton aplicada a  $+q$

$$\mathbf{F}_{\text{anillo}} + \mathbf{F}_{\text{aplicada}} = m \mathbf{a}$$

que en forma de escalar queda, manteniendo la linealidad de  $F_{\text{anillo}}$ , como

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x + q E_0 \cos \omega t = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

si hacemos

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m} = \omega_0^2$$

queda

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{q E_0}{m} \cos \omega t$$

b) cuya solución estacionaria es de la forma  $x = A \cos(\omega t + \phi)$  donde

$$A = \frac{q E_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

y

$$\begin{aligned} \phi &= 0, & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \phi &= -\pi, & \text{si } \omega > \omega_0 \end{aligned}$$

Así, para frecuencias inferiores a  $\omega_0$ , el campo aplicado y el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio, y por tanto el momento dipolar inducido, están en fase. Si tomamos la aplicación numérica de b.4 del ejemplo 1.7, con una masa igual a la del protón,  $\omega_0$  es del orden de magnitud de  $10^{16} \text{ Hz}$ , que sitúa esta frecuencia fundamental en el límite entre ultravioleta y rayos X.

c) El momento dipolar inducido valdrá,  $p = qx(t)$ . Sustituyendo  $x(t)$



$$p = q\dot{x}(t) = \frac{q E_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \phi)$$

o bien, para  $\omega < \omega_0$

$$p = \frac{q^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} E$$

d) Dado el elevado valor del factor de calidad  $Q$  el sistema solamente absorbe energía si la frecuencia de excitación es  $\omega \approx \omega_0$ . La emisión debería ser por radiación a la frecuencia de oscilación  $\omega = \omega_0$ .

### Ejercicio 3.4 .....

Una partícula de masa  $m = 4,0 \cdot 10^{-26}$  kg se encuentra en un pozo de energía potencial  $U = cx^2$ , donde  $c = 0,5 \cdot 10^{-6}$  J/m<sup>2</sup>.

- Determinar la frecuencia propia de este oscilador y la amplitud de oscilación cuando la energía total es de 0,020 eV.
- Si está sometido a una fuerza de tipo viscoso  $F_v = -b v$  donde  $b = 1,0 \cdot 10^{-17}$  Ns/m, ¿durante cuánto tiempo se mantendrá la oscilación?, ¿cuál es el número de oscilaciones que realizará antes de detenerse?
- Si además se le aplica una fuerza de tipo armónico, dibujar aproximadamente la curva de la potencia absorbida por el oscilador en función de la frecuencia de la fuerza aplicada. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia y el ancho de banda de este oscilador forzado?
- Sea una onda electromagnética cuyo campo eléctrico viene descrito por:  $E_x = E_0 \cos(kx - \omega t)$ . Hallar la fuerza eléctrica que dicha onda ejerce sobre una carga eléctrica  $q$ . Discutir si en algún caso puede ser importante la fuerza magnética.
- Supóngase que un medio material está constituido por un gran número de osciladores como el que se ha descrito, cuya partícula tiene una carga eléctrica  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Hallar para qué frecuencias las ondas electromagnéticas son absorbidas por el material (el material es opaco) y para qué frecuencias no hay absorción (es transparente). Hallar la longitud de onda de la radiación mejor absorbida e indicar de qué tipo de radiación se trata (visible, UV, Radio, rayos X, etc.)

**R:**

- a)  $5 \cdot 10^9$  rad/s ,  $8 \text{ \AA}$  ; b)  $4 \cdot 10^{-9}$  s , 20 ; c)  $2,5 \cdot 10^8$  rad/s

.....

## 4 Fenómenos ondulatorios

### 4.1 Descripción de una onda. Ecuación de onda unidimensional. Medios lineales: superposición de ondas.

Muchos fenómenos físicos responden a lo que denominamos fenómenos ondulatorios. Mediante fenómenos de este tipo, oímos, vemos, o se transmite información por radio y televisión, por citar algunos ejemplos. Todos estos fenómenos pueden comprenderse mejor con unos pocos conceptos matemáticos unificadores. Los fenómenos ondulatorios podrían definirse como aquellos en que se transporta energía y cantidad de movimiento desde un emisor o fuente hasta un receptor, generalmente alejados entre sí, sin transferencia de materia entre ambos.

La diversidad de los fenómenos ondulatorios hace que establecer una clasificación de las ondas resulte complejo. Pueden clasificarse según la manera de originarse, o según el medio en que se propagan, o también, por ejemplo, por la relación existente entre la dirección del movimiento de las partículas del medio y la dirección de propagación de la energía.

Comencemos con algunas ideas simples concernientes a la propagación de una perturbación que viaja según una dirección. Podría ser: un desplazamiento vertical propagándose en una cuerda horizontal, una señal acústica propagándose por un tubo cilíndrico, o el estado de caída de fichas de dominó alineadas; también casos más abstractos como la magnitud de un campo eléctrico o magnético o la amplitud de probabilidad de una onda de materia.

La representación matemática de la perturbación,  $\Psi$ , debe ser una función de la posición y el tiempo,  $\Psi = y(x, t)$ . La forma de la perturbación se obtendrá mediante una "fotografía" o instantánea de la perturbación. Así, la forma en  $t = 0$ , será  $\Psi(x, t)_{t=0} = y(x, 0) = y(x)$ . Generalmente, su forma variará al moverse. Consideremos, de momento, la posibilidad más simple; que la perturbación se propague, *sin variar su forma*, mientras avanza por el espacio a velocidad constante,  $v$ , hacia la derecha. En un sistema de referencia  $S'$ , tal que  $x = x' = 0$ , en  $t = t' = 0$ , que viaje junto con el pulso a velocidad  $v$ , la función  $\Psi$  no será una función del tiempo. Desde  $S'$  la forma de la perturbación es estacionaria y tiene la misma forma que tenía en  $S$  para  $t = 0$ , para cualquier valor de  $t$  en  $S'$ , por tanto  $\Psi = f(x')$  y como  $x' = x - vt$  podemos escribir que en  $S$ :

$$\Psi = f(x-vt)$$

que representa la forma general de la función de onda unidimensional. Obsérvese que si la descripción correspondiera a una onda propagándose en el sentido negativo de las  $x$  la ecuación vendría dada por:

$$\Psi = f(x+vt)$$

Podemos, pues, decir que, independientemente de la forma de la perturbación, las variables  $x, t$ , deben aparecer en la función como una variable simple de la forma  $x \pm vt$ .

La función de onda se expresa también como una función de  $t - (x/v)$

$$\Psi = f(x-vt) = g(t-(x/v))$$

que indica, directamente, que todo punto  $x$ , sufre la misma perturbación que ha sufrido el origen, pero con un retraso de  $\Delta t = x/v$ . Como antes, una onda que se propague en el sentido negativo de las  $x$ , se describirá mediante la función  $\Psi = g(t + (x/v))$  si la forma de la perturbación en  $x = 0$  viene dada por  $g(t)$ . En resumen: la perturbación,  $\Psi$ , se describe mediante una función de dos variables, posición y tiempo. La aparición de una función de onda deberá surgir como solución de algún problema físico. La aplicación de las leyes conocidas a ese problema deben conducirnos a una ecuación diferencial del movimiento, al igual que hemos visto en el caso de los osciladores. Sin embargo, la función de onda depende de dos variables, posición y tiempo, por lo que es de suponer que la ecuación sea, en este caso, en derivadas parciales. No nos planteamos, ahora, esta forma de trabajo, de la que posteriormente veremos algún ejemplo. Ahora nos planteamos la cuestión inversamente y desde un punto de vista estrictamente matemático: ¿qué tipo de ecuación diferencial en derivadas parciales tiene por solución funciones del tipo  $f(x-vt)$ ? Hay una relación sencilla entre las derivadas parciales respecto a  $x$  y respecto a  $t$  de la función de onda  $\Psi(x,t)$ . Si hacemos  $x' = x \pm vt$  tenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (4.1)$$

ya que

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1$$

y

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (4.2)$$

ya que

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v$$

De las ecuaciones 4.1 y 4.2 obtenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \pm v \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.3)$$

Así pues, para ondas unidimensionales que se propaguen en uno y otro sentido en la dirección  $x$ , la rapidez de cambio de  $\Psi$  con  $t$  y la de  $\Psi$  con  $x$  son iguales salvo una constante. La ecuación 4.3 es el primer ejemplo de ecuación de onda. Su solución general  $\Psi$  representa una perturbación de forma arbitraria, pero que permanece invariable -rígida- propagándose según  $x$  con celeridad  $v$ .

Para evitar los signos  $\pm$  de la ecuación 4.3 tomamos las segundas derivadas de 4.1 y 4.2, así

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \pm v \frac{\partial}{\partial x'} \left( \pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

De donde obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

Esta ecuación diferencial lineal recibe el nombre de ecuación lineal de onda (ELO). Para llegar a la ELO hemos partido de una onda progresiva y hemos visto que las derivadas respecto a  $x$  y a  $t$  guardan esa relación sencilla. De manera inversa, si sabemos que la derivada segunda respecto al espacio de una cantidad,  $\Psi$ , es proporcional a la derivada segunda respecto al tiempo de la misma cantidad, entonces  $\Psi(x, t)$  es una onda o una superposición de ondas. Además, el cuadrado de la velocidad de propagación debe ser igual al cociente constante entre las segundas derivadas, temporal y espacial.

La idea de  $\Psi(x, t)$  como superposición de ondas es consecuencia de la linealidad de la ELO ya que si dos funciones de onda diferentes  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son, cada una, solución diferente de la ELO, cualquier combinación lineal de ambas

$$\Psi = A\Psi_1 + B\Psi_2$$

es también una solución. Según esto la ELO se satisface, de una manera más general, por una función de onda de la forma

$$\Psi = Af_1(x - vt) + Bf_2(x + vt)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. La solución corresponde a la suma de dos ondas que viajan en sentidos opuestos a lo largo de  $x$ , con la misma velocidad pero no teniendo la misma forma, necesariamente.

#### Ejercicio 4.1 .....

La figura 4.1 muestra dos pulsos de onda en una cuerda tensa, empezando en  $t = 0$ . Los pulsos se mueven en sentidos opuestos cada uno de ellos con una velocidad de 1 cm/s. Dibujar la forma de la cuerda para  $t = 1; 1,5; 2; 2,5; 3$  y  $4$  s.

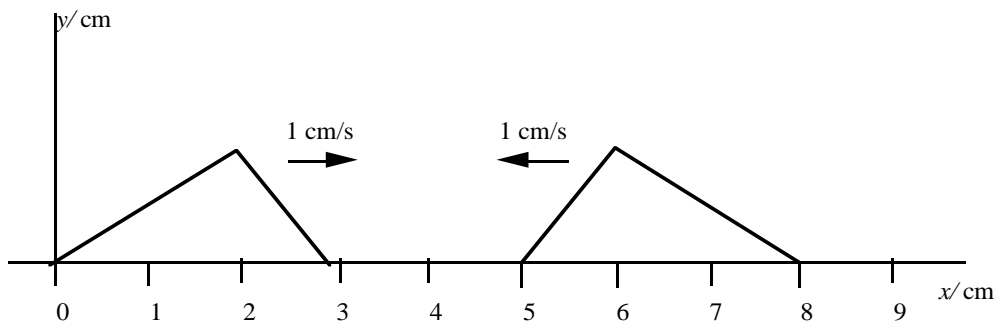


Fig. 4.1

.....

## 4.2 Ondas armónicas: notación compleja

Entre todas las formas posibles de perturbación, estudiaremos las que tienen forma senoidal y que se conocen como ondas armónicas. Su importancia radica en el hecho de que cualquier otra forma se puede obtener como superposición de ondas armónicas.

Tomemos como perfil o forma de la perturbación la función

$$\Psi(x, t)_{t=0} = \Psi(x, 0) = A \cos kx = f(x)$$

donde  $k$  es un parámetro positivo y  $kx$  está en radianes. El valor máximo de  $\Psi(x)$  es  $A$  que se conoce como amplitud de la onda.

Para representar con  $\Psi(x, t)$  una onda progresiva armónica que viaje a velocidad  $v$  en el sentido positivo de las  $x$ , bastará escribir

$$\Psi(x, t) = A \cos k(x - vt)$$

que corresponde al tipo de funciones  $f(x - vt)$  solución de la ELO.

Esta función tiene dos períodos diferentes, uno en el espacio,  $\lambda =$  longitud de onda, y otro en el tiempo  $T$ . Un  $\Delta x = \pm \lambda$  debe dejar  $\Psi$  inalterada

$$\Psi(x, t) = \Psi(x + \lambda, t) = \Psi(x - \lambda, t)$$

lo que equivale a variar el argumento de la función coseno en  $\pm 2\pi$

$$\cos k(x - vt) = \cos k((x + \lambda) - vt) = \cos(k(x - vt) + 2\pi)$$

es decir debe ser

$$|k\lambda| = 2\pi$$

De la misma forma para el período temporal,  $T$

$$\Psi(x, t) = \Psi(x, t + T)$$

lo que equivale a

$$\cos k(x - vt) = \cos k(x - v(t + T)) = \cos[k(x - vt) + 2\pi]$$

de donde

$$|kvT| = 2\pi$$

Como todas estas cantidades son positivas

$$kvT = 2\pi = k\lambda$$

y de aquí

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Se emplea la frecuencia  $f = 1/T$  o número de ondas por unidad de tiempo, (ciclos/s = hertz = Hz) y también,  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ , (rad/s)

Las expresiones trigonométricas resultan molestas para operar con ellas, así que se usa frecuentemente la notación compleja, que resulta más cómoda para trabajar tal como ya hicimos en el tema de oscilaciones. Así, en lugar de  $\Psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0) = A \cos \phi$ , podemos escribir

$$\Psi(x,t) = \Re[A e^{j\phi}]$$

podemos tomar  $\Psi(x,t) = A e^{j\phi}$ , utilizándola así para los cálculos. Llegados al resultado final, y si deseamos representar la onda verdadera, tomaremos la parte real. Como se ha comentado en las oscilaciones esta relación se mantiene dada la linealidad de la ecuación diferencial de onda.

### Ejercicio 4.2

Las figuras 4.2.a y 4.2.b muestran las periodicidades temporal y espacial respectivamente, de una onda progresiva armónica :

- Indicar el valor de su frecuencia angular, el valor de su número de onda  $k$ , y el valor de su velocidad de propagación  $v$ .
- Las escalas empleadas en los ejes de ordenadas son arbitrarias ¿Es la misma escala en ambas gráficas?
- Escribir la función de onda

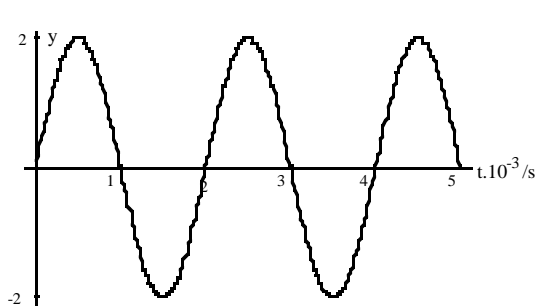


Fig. 4.2.a

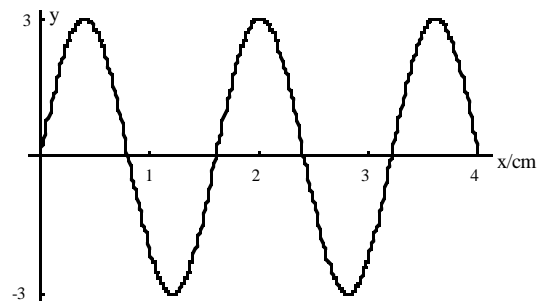


Fig. 4.2.b

### 4.3 Fase y velocidad de fase

El argumento de la función armónica  $\Psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$  se conoce como la fase  $\phi$  de la onda

$$\phi = kx - \omega t$$

En general

$$\phi = kx - \omega t + \phi_0$$

donde  $\phi_0$  es la fase inicial. Como  $\phi = \phi(x,t)$  podemos calcular

$$\left| \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{x=\text{const}} \right| = \omega$$

rapidez de cambio de la fase con el tiempo, y

$$\left| \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{t=\text{const}} \right| = k$$

rapidez de cambio de la fase con la distancia. Como

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

a fase constante,  $d\phi = 0$ , podremos escribir

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\phi} = - \frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_x}{\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_t}$$

donde el primer término representa la velocidad de propagación de un punto de fase constante; sustituyendo las derivadas

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\phi} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v$$

que corresponde a la celeridad con que se mueve el perfil de la onda y que se denomina velocidad de fase. El signo positivo corresponde a cuando la onda se mueve en el sentido de las  $x$  positivas; como  $\phi = k(x - vt) = \text{constante}$ , cuando  $t$  aumenta,  $x$  debe aumentar.

## 4.4 Ondas en el espacio

### 4.4.1 Ondas planas

Hasta ahora  $\Psi(x,t)=f(x-vt)$  representaba una perturbación propagándose según  $+x$ . Si la perturbación que describe  $\Psi$  se extiende por todo el espacio, pero de tal forma que, en un instante dado  $t$ , la función  $\Psi$  toma el mismo valor en todos los puntos de abscisa  $x$  y, como quiera que  $x = \text{constante}$  representa un plano perpendicular al eje  $x$ , dicha función,  $\Psi(x,t)=f(x-vt)$ , describe una onda plana que se propaga, en el espacio, paralelamente al eje  $x$ .

La característica de una onda plana es que en un instante dado, todas las superficies, en las que la perturbación tiene fase constante, forman un conjunto de planos perpendiculares a una dirección, que es la dirección de propagación. Intentemos describir ésto de forma independiente del sistema de coordenadas.

Sea  $\mathbf{u}$ , el versor perpendicular al plano de la onda, figura 4.3; la ecuación de un plano perpendicular a  $\mathbf{u}$  es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de cualquier punto del plano. Introduciendo el vector  $\mathbf{k} = k \mathbf{u}$ , llamado vector de propagación, una onda armónica plana se representa por:

$$\psi = A \cos k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

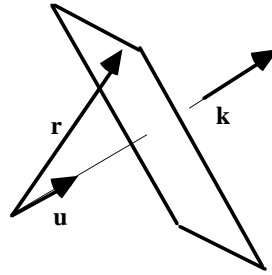


Fig. 4.3

o bien en forma compleja

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Obviamente, si el vector propagación es  $\mathbf{k} = k\mathbf{i}$ , la ecuación es la misma del ejemplo unidimensional, de la que hemos partido. En general, las superficies que unen todos los puntos de igual fase se denominan frentes de onda, en este caso planos de onda, como los que se muestran en la figura 4.4.

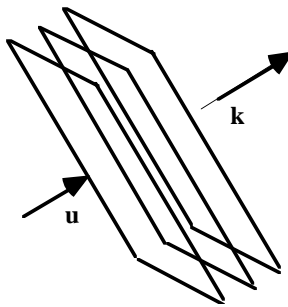


Fig. 4.4

También en general el vector propagación será de la forma

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k}$$

y su módulo mantendrá la relación con  $\omega$  y la velocidad de fase de la siguiente manera

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

Cuando la propagación tiene lugar en un espacio tridimensional la ecuación diferencial de onda se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$



que utilizando el operador

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

podemos escribir

$$\Delta \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Puede verificarse por sustitución directa que cualquier función de la forma

$$\psi(r,t) = A f\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{k} - vt\right)$$

es solución de esa ecuación. También lo es una combinación lineal como

$$\psi(r,t) = A f\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{k} - vt\right) + B g\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{k} + vt\right)$$

con  $A$  y  $B$  constantes. En particular  $\psi(r,t) = A e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ , aunque contenga las tres coordenadas  $x, y, z$  es en realidad una onda armónica unidimensional. Su propagación es según la dirección  $\mathbf{k}/k$  y la situación física es la misma en todos los puntos de los planos perpendiculares a la dirección de propagación.

#### 4.4.2 Ondas esféricas

Las coordenadas cartesianas son adecuadas para describir las ondas planas, pero hay otras clases de ondas para las que podemos aprovechar mejor las simetrías existentes usando otras coordenadas; nos preocuparemos únicamente de las ondas esféricas.

Si en un punto, se origina una perturbación que fluye radialmente hacia afuera uniformemente en todas las direcciones (fuente isotrópica) y la perturbación se propaga en todas las direcciones con la misma velocidad, (medio isotrópico), los frentes de onda serán esferas concéntricas centradas en la fuente y de radio creciente al expandirse en el espacio. La simetría de los frentes de onda sugiere utilizar coordenadas esféricas ya que para fuente y medio isotrópicos se verificará

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi(r,t)$$

Podemos calcular  $\Delta \psi$  para ello debemos entretenernos en calcular unas cuantas derivadas, así

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

derivando de nuevo

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

como

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

tenemos

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

derivando de nuevo

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

y por tanto

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

Considerando las derivadas respecto de  $y$ ,  $z$  obtendríamos, sumando las tres

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial r^2}$$

Así, la ecuación de onda puede escribirse

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

o también

$$\frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial t^2}$$

que es la ecuación diferencial de una onda unidimensional, **con  $r$  como variable espacial y  $(r\Psi)$  como función de onda.** Así, la solución es del tipo

$$(r\Psi) = f(r - vt)$$

de donde

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} f(r - vt)$$

Para una onda esférica armónica

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \cos k(r - vt)$$

Tenemos, pues, que en una onda esférica la amplitud va disminuyendo con  $r^{-1}$ ,  $A(r) = A/r$ . A la luz de este resultado, podemos tratar una onda esférica como plana cuando las dimensiones del espacio en que la observamos sean pequeñas frente a la distancia a su fuente.

Si la velocidad de propagación no es la misma en todas las direcciones, caso de un medio anisótropo, las ondas no son esféricas. También puede suceder que los frentes de onda sean esféricos pero que la amplitud varíe según la dirección, porque la fuente produce efectos diferentes en cada dirección.

## 4.5 Tipos de ondas

Hasta ahora, hemos visto ondas *unidimensionales*, *planas* y *esféricas*; todas ellas ondas *progresivas* o viajeras. También existen ondas confinadas en una región del espacio, se denominan ondas *estacionarias* y las describiremos más adelante en el caso unidimensional.

Otra manera de clasificar las ondas es atendiendo a la dirección de la perturbación con respecto a la dirección de propagación de la onda. Así, cuando la perturbación ocurre en la misma dirección en que se propaga la onda se denomina *longitudinal*. Si la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación, la onda se denomina *transversal*. Como existen infinitas direcciones perpendiculares a la dirección de propagación, debemos definirla para determinar por completo la onda. Tomados dos ejes perpendiculares entre sí,  $(x,y)$ , y también a la dirección de propagación,  $z$ , podemos considerar  $\psi$  descompuesta en  $\psi_x$  y  $\psi_y$  de tal manera que la función de onda de una onda transversal plana se comporta de forma parecida a una cantidad vectorial. Si, como hemos supuesto, la onda se propaga según  $z$

$$\Psi(z,t) = \psi_x(z,t) \mathbf{i} + \psi_y(z,t) \mathbf{j}$$

Una onda plana armónica de estas características podría escribirse

$$\psi(r,t) = \mathbf{A} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

si la orientación del vector  $\mathbf{A}$  es siempre la misma decimos que la onda está *polarizada* linealmente. La perturbación está confinada en un plano fijo en el espacio, llamado plano de vibración. Obsérvese que  $\psi$  y  $\mathbf{A}$  difieren solamente en un escalar y que por lo tanto son paralelos entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación  $\mathbf{k}/k$ . La ecuación diferencial de onda vista

$$\Delta\Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

es una ecuación lineal, es decir  $\psi(r,t)$  y sus derivadas aparecen solamente a la primera potencia (o a potencia nula). La característica de cualquier sistema lineal es la aplicabilidad del principio de superposición (formalmente: cualquier combinación lineal de soluciones particulares, es solución), o lo que es lo mismo en cualquier punto de un medio la perturbación es la suma algebraica de las ondas constitutivas separadas. No hay interacción entre las ondas.

Sólo trataremos los sistemas lineales, lo que no quiere decir que sean los únicos existentes. En los sistemas no lineales existe interacción entre ondas y la velocidad depende de la amplitud, mientras que es independiente en los lineales.

Aún cuando la ecuación sea lineal, el medio de propagación puede hacer que la velocidad de propagación de la perturbación sea la misma, o no, para cada frecuencia. Si es la misma, cualquier onda mantiene su forma y el medio se denomina *no dispersivo*. Si cada onda armónica tiene una velocidad distinta de las otras, la onda armónica mantendrá su forma, pero no lo hará cualquier otro tipo de onda, y el medio se denomina *dispersivo*; en ellos la ecuación diferencial es la misma pero la velocidad es una función de la frecuencia,  $v = v(\omega) = \omega/k(\omega)$ . Por lo tanto, la forma de  $\psi(r,t)$  no permanece constante para todo tiempo. La dependencia con la frecuencia, del número de onda, se denomina *relación de dispersión*.

Mientras no se diga lo contrario trataremos sólo el caso particular de medios no dispersivos; en este caso, la velocidad de fase es independiente de  $\omega$ ; todos los términos de una superposición de ondas armónicas progresivas satisfacen la misma ecuación diferencial, la ecuación 4.4, donde  $\psi(r,t)$  representa cualquiera de las ondas armónicas. Como cada término satisface la ecuación 4.4, también lo hace la superposición. Esta ecuación, con  $v$  independiente de  $\omega$ , es la ecuación diferencial de onda clásica, para ondas no dispersivas.

## 5 Ondas transversales progresivas en una cuerda

### 5.1 Ecuación de onda

Supongamos una cuerda, de masa por unidad de longitud uniforme e igual a  $\mu$ , sometida a una tensión,  $T_0$ , que la mantiene estirada, figura 5.1.a. El extremo izquierdo está unido a un oscilador armónico que suministra la fuerza motriz a la cuerda, el extremo de la derecha está "en el infinito", figura 5.1.b.

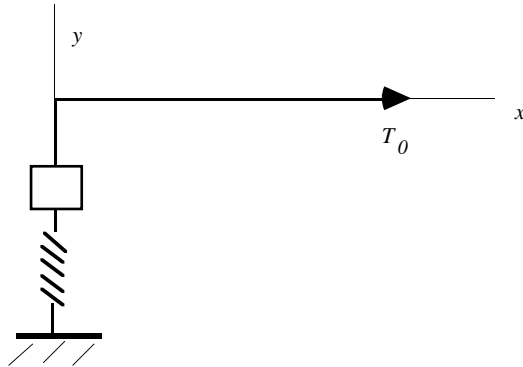


Fig. 5.1.a

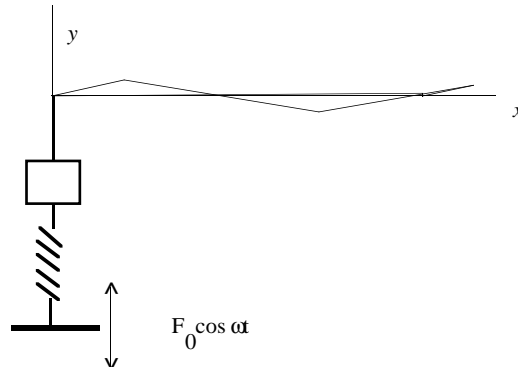


Fig. 5.1.b

En el equilibrio no hay componente transversal de la tensión, pero con el excitador en marcha la tensión en la cuerda es  $T$ . Supondremos que el efecto de la perturbación es lo suficientemente pequeño para que  $T$  sea uniforme a lo largo de la cuerda, también supondremos que  $T$  es suficientemente grande para que el peso de la cuerda pueda despreciarse y también que la cuerda se comporta elásticamente, según la ley de Hooke.

Supongamos que la propagación de la perturbación, producida por el oscilador armónico de la izquierda, responde a una ecuación diferencial de onda. Dicha ecuación expresa que la aceleración de un elemento de cuerda es proporcional a la curvatura de la cuerda en dicho elemento. Si la curvatura es grande, también lo es la aceleración. Si la cuerda está recta,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ , la aceleración es nula; si, por ejemplo,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$  en un elemento, la cuerda es ahí cóncava ( $\cup$ ) y la aceleración está dirigida hacia arriba.

Veamos como la aplicación de la segunda ley de Newton y de la ecuación constitutiva del material, ley de Hooke, conducen a la predicción de la existencia de ondas, o lo que es lo mismo a la ecuación diferencial de onda.

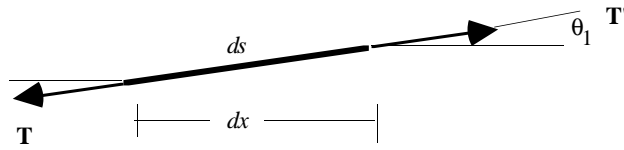


Fig. 5.2

La figura 5.2 muestra un elemento de cuerda de longitud  $dx$  en la posición de equilibrio y desplazado de la misma, debido a la presencia de una perturbación. En las consideraciones anteriores,  $|\mathbf{T}| = |\mathbf{T}'| = T$ , y por la ley de Hooke

$$T = T_0 \frac{ds}{dx}$$

donde  $ds$  es la longitud deformada del elemento de cuerda; la componente según  $y$  de  $T$  será

$$T_y = T_0 \frac{ds}{dx} \text{ sen } \theta = T_0 \left( \frac{dy}{dx} \right)_x$$

y la componente  $y$  de la fuerza resultante sobre el elemento es

$$\Sigma T_y = T_0 \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x+dx} - \left( \frac{dy}{dx} \right)_x \right] = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

como la masa del elemento considerado es  $\mu dx$ , aplicando la segunda ley de Newton a ella

$$\Sigma T_y = ma_y$$

como

$$a_y = \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)_x = \text{posición elemento} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

tenemos

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

que es la ecuación diferencial de onda. Así, la segunda ley de Newton predice la existencia de ondas en una cuerda que se propagarán a una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (5.1)$$

## 5.2 Impedancia característica

Consideremos la fuerza que la cuerda ejerce sobre el excitador; tomando la componente vertical

$$F_y \text{ (cuerda sobre excitador)} = T \sin \theta = T_0 \frac{ds}{dx} \sin \theta = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

En las condiciones anteriores, es decir con un excitador alimentando una cuerda semiinfinita, dando lugar a ondas que se propagan hacia la derecha,  $y(x,t)$  será de la forma  $y = f(u) = f(x - vt)$ , entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial u}$$

de donde

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t}$$

así

$$F_y \text{ (cuerda sobre excitador)} = -\frac{T_0}{v} \frac{\partial y}{\partial t}$$

es decir, cuando desde el excitador se emiten ondas progresivas, la fuerza que el medio, (en este caso, la cuerda) ejerce sobre el terminal del emisor es una fuerza de frenado, o amortiguamiento, que se opone al movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad que se le ha impuesto. Como en el oscilador forzado, llamaremos *impedancia*,  $Z$ , a la constante de proporcionalidad

$$F_y \text{ (cuerda sobre excitador)} = -Z \frac{\partial y}{\partial t}$$

con

$$Z = \frac{T_0}{v} \tag{5.2}$$

como  $v^2 = T/\mu$ , también podemos escribir

$$Z = \sqrt{T_0 \mu} = \mu v \tag{5.3}$$

## 5.3 Potencia suministrada a la cuerda

Podemos decir que el trabajo realizado por el emisor contra la fuerza "viscosa", no se ha disipado/transformado en calor sino que ha sido transmitido como energía sobre la cuerda, que la transporta. La potencia entregada por el emisor será:

$$P(t) = F_y (\text{excitador sobre cuerda}) \frac{\partial y}{\partial t}$$

donde recordemos que por la tercera ley de Newton

$$F_y (\text{excitador sobre cuerda}) = - F_y (\text{cuerda sobre excitador})$$

La potencia  $P(t)$  emitida/irradiada en el extremo izquierdo es igual a la energía que, por unidad de tiempo, viaja en la dirección  $+x$ , en cualquier punto de la cuerda que se considere, ya que estamos despreciando todo amortiguamiento (cuerda elástica lineal). Es decir

$$P(0,t) = P(x,t)$$

Así, para la onda de propagación

$$P(0,t) = P(x,t) = Z \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} = Z \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (5.4)$$

Si la excitación es armónica  $y(0,t) = A \cos \omega t$ , las ondas progresivas también serán armónicas  $y(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ , con  $v = \omega/k$ . La potencia instantánea será

$$P(x,t) = Z \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 = Z \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

en valor medio temporal, y para cualquier  $x$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 = \eta v \quad (5.5)$$

con

$$\eta = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \quad (5.6)$$

que es la energía media por unidad de longitud de cuerda.

### Ejercicio 5.1

La función de onda correspondiente a una onda armónica en una cuerda es  $y(x,t) = 0,001 \sin(62,8x + 314t)$ , estando  $y$  y  $x$  en metros y  $t$  en segundos.

- ¿En qué dirección se mueve esta onda y cuál es su velocidad?
- Hallar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda.
- ¿Cuál es el desplazamiento máximo de un segmento cualquiera de la cuerda?

**R:**

- a) izq.,  $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ; b) 10 cm ; 50 Hz ; 0,02 s ; c) 1 mm

**Ejercicio 5.2**

Una cuerda de piano de acero tiene 0,70 m de longitud y una masa de 5,0 g. Se tensa mediante una fuerza de 500N.

- a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en el hilo?  
 b) ¿Para reducir la velocidad de la onda en un factor 2 sin modificar la tensión, ¿qué masa de alambre de cobre habrá que enrollar alrededor del hilo de acero?

**R:**

- a)  $265 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ; b) 15 g.

**Ejercicio 5.3**

Una cuerda de 20 m. tiene una masa de 60 g y está sometida a una tensión de 50N. Se mueven a lo largo de la cuerda de izquierda a derecha unas ondas de frecuencia 200Hz y amplitud 10 mm.

- a) ¿Cuál es la energía total de las ondas en la cuerda?  
 b) ¿Cuál es la potencia transmitida que pasa por un punto determinado de la cuerda?

**R :**

- a) 4,7 J ; b) 31 W

**Ejercicio 5.4**

Un oscilador mecánico cuya frecuencia propia es  $\omega_0=2\pi\cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  y cuya masa vale  $m=20 \text{ g}$ . está situado en un plano horizontal y está conectado a una cuerda tensa semiinfinita cuya impedancia vale  $Z=10 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , y donde las ondas se propagan con una velocidad  $c=100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

- a) Se puede suponer que la acción que la cuerda ejerce sobre el oscilador es equivalente a la existencia de un rozamiento viscoso tal que el coeficiente  $b$  es igual a la impedancia  $Z$  de la cuerda ( $b=Z$ , ya que  $F_y=Zv_y$ ). Admitiendo que no hay ningún otro rozamiento, determinar las siguientes características del oscilador:  $\tau$ ,  $Q$  y la rigidez  $k$  del muelle.  
 b) Si se impulsa el oscilador con una fuerza armónica  $F_y(t)=F_0 \cos\omega_0 t$  de tal forma que la amplitud de la oscilación de la masa es  $A(\omega_0)=0,2 \text{ mm}$  (que es igual a la amplitud de la onda). Calcular la potencia media transmitida a la cuerda  $P(\omega_0)$ , así como el valor de  $F_0$ .  
 c) Calcular el retardo  $t_1$  de la onda en llegar al punto  $x_1=10 \text{ m}$ , ¿cuál es el retraso de fase  $\phi_1$  de la oscilación en este punto respecto de  $x=0$ ? ¿Cuánta energía corre entre  $x=0$  y  $x=10\text{m}$ ? ¿Cuál es la densidad de energía media  $\eta$  sobre la cuerda?  
 d) Calcular las energías medias potencial  $U$ , cinética  $E_k$  y total  $E_0$  almacenadas por el oscilador. Si en un cierto instante desaparece súbitamente la fuerza impulsora de tal forma que  $F(t)=0$ , para  $t > 0$ .  
 e) Dar la nueva expresión del movimiento de la masa  $y(t, x=0)$  ¿cuántos ciclos oscilará durante un  $\tau$ ?  
 f) Dibujar la fotografía de la cola de la onda sobre la cuerda estimando su longitud  $L$ . ¿Cuánta energía transporta durante el primer  $\tau$ ?. Dar la expresión analítica de su función de onda  $y(x,t)$ .

**R:**

- a) 2 ms ; 13 ;  $8\cdot 10^5 \text{ N/m}$  ; b) 8 W ; 13 N ; c) 0,1 s ; 0,8 J ; 0,08 J/m  
 d) 8 mJ ; 8 mJ ; 16 mJ ; e)  $\approx 2$  ciclos ; f) 11 mJ ;  $y = a e^{-(t-x/c)/2\tau} \cos(kx - \omega t)$

**Ejercicio 5.5**

Un oscilador mecánico de masa  $m=1,0 \text{ kg}$ , de rigidez  $k$  y de constante viscosa  $b$ , está impulsado por una fuerza  $F_0 \cos\omega t$  y tiene una curva de resonancia en amplitudes de la forma de la figura 5.3.



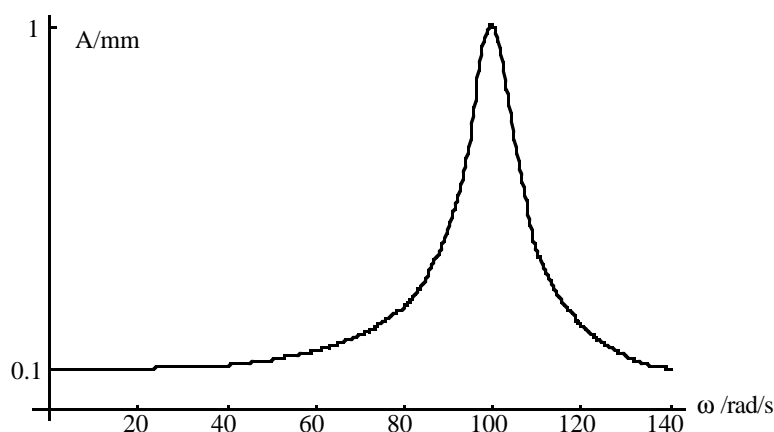


Fig. 5.3

- Calcular  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $k$  y  $F_0$ .
- Escribir las expresiones, en la resonancia, de la posición,  $x(t)$ , la velocidad,  $v(t)$ , y la aceleración,  $a(t)$ , de la masa oscilante indicando el valor de su desfase frente a la fuerza impulsora.
- Escribir, también en la resonancia, las expresiones de la fuerza total, de la fuerza elástica y de la fuerza viscosa.
- Demostrar que la potencia disipada por el oscilador es de la forma  $P_d = b \cdot v^2$ . ¿Cuál es el valor de la potencia media disipada en la resonancia  $P_d(\omega_0)$ ?

Por otra parte, se dispone de una cuerda de densidad  $\mu = 0,10 \text{ kg/m}$  sometida a una tensión  $T = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N}$  excitada por un extremo por un vibrador cuya frecuencia es la de resonancia del oscilador,  $\omega_0$ , de tal forma que se produce una onda progresiva de amplitud  $A = 1,0 \text{ mm}$ .

- Calcular la velocidad de propagación  $v$
- Calcular la densidad de energía  $\eta$  y la potencia transmitida  $P_t$ .

El otro extremo de la cuerda se suelda a la masa del oscilador forzándolo a vibrar a la frecuencia de resonancia, observándose que no se produce onda reflejada, de tal forma que  $P_t = P_d$

- A partir de esta relación, escrita en forma genérica, demostrar que este fenómeno solo ocurrirá si  $\mu \cdot v = b$

**R:**

- a)  $100 \text{ rad/s}$  ;  $10$  ;  $10^4 \text{ N/m}$  ;  $1 \text{ N}$ ; e)  $100 \text{ m/s}$  ; f)  $5 \cdot 10^{-4} \text{ J/m}$  ;  $0,05 \text{ W}$

### Ejercicio 5.6

Un oscilador produce ondas armónicas en una cuerda. Se observa que el oscilador completa 90 vibraciones en 30 s y que la onda viaja como máximo 420 cm en 10 s. La tensión en la cuerda es 25 N; la amplitud de la onda 12 mm. y se propaga en la dirección  $+x$ . Para esta onda:

- Determinar: frecuencia angular, velocidad de fase, longitud de onda.
- Escribir la función de onda,  $y_1(x,t)$ , suponiendo  $y_1(x,0) = 0$  en el punto  $x = 7,0 \text{ cm}$ .
- Calcular la máxima velocidad transversal de un punto de la cuerda.
- Calcular la velocidad transversal del punto de la cuerda situado en  $x = 7,0 \text{ cm}$  en el instante  $t = 0,10 \text{ s}$ .
- La potencia suministrada por el oscilador y transmitida a la cuerda.
- ¿Debería cambiar la potencia calculada si, manteniendo constante la tensión en la cuerda, se

duplicara la amplitud y la frecuencia se redujera a la mitad?.

**R:**

- a)  $\omega = 2\pi f = 19 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $v = 0,42 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\lambda = 0,14 \text{ m}$ ; b)  $y_1(x,t) = 12(\text{mm}) \cos(45x - 19t \pm \pi/2)$   
 c)  $v_{t0} = y_{10} \omega = 12 \cdot 10^{-3} \cdot 19 = 0,23 \text{ ms}^{-1}$ ; d)  $v_t(0,070,0,10) = \pm 0,074 \text{ ms}^{-1}$   
 e) Potencia instantánea:  $P(0,t) = 3(\text{W})\cos^2(19t)$ ; potencia media:  $\langle P(0,t) \rangle = 1,5 \text{ W}$ , f) no

#### 5.4 Cambio de medio de propagación. Transmisión y reflexión de una onda progresiva

El problema que nos planteamos es el siguiente: ¿qué sucede cuando una onda progresiva llega a la separación entre dos medios, en los que las condiciones de propagación son distintas?. Estas condiciones pueden darse, en el caso de las ondas elásticas que se propagan en una cuerda, si a partir de una sección recta de la misma cambia la densidad lineal  $\mu$ , y la velocidad de propagación,  $v$ , de la onda.

Un dispositivo real, que hiciera posible diferente tensión en  $x > 0$  y  $x < 0$ , podría construirse mediante la unión de dos cuerdas semiinfinitas a una anilla de masa despreciable, que pudiera deslizarse verticalmente a lo largo de una varilla vertical lisa (sin rozamiento entre varilla y anilla), figura 5.4.

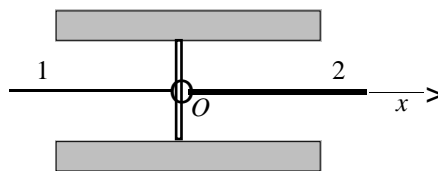


Fig. 5.4

Consideremos una onda armónica, en un dispositivo como el descrito, que se propaga en el sentido positivo de las  $x$ ; hacemos coincidir el origen de coordenadas con la separación entre los dos medios, como se muestra en la figura. En un caso genérico existirá una onda incidente,  $y_I(x,t)$ , una onda reflejada,  $y_R(x,t)$ , y una transmitida  $y_T(x,t)$ . Admitiendo, pues, que no se transmite toda la onda incidente del medio 1 al medio 2, sino que hay también una onda reflejada por la discontinuidad que separa los medios, esta onda se propaga en el medio 1, en el sentido negativo de las  $x$ , superponiéndose a la onda incidente; por lo tanto en el medio 1,  $x < 0$

$$y_1(x,t) = A_I e^{j(t\omega - k_1x)} + A_R e^{j(t\omega + k_1x)}$$

En el medio 2,  $x > 0$ , se propaga únicamente la onda transmitida de la que aceptamos que tiene la misma frecuencia que la onda incidente (así será para los medios lineales, únicos que aquí consideramos)

$$y_2(x,t) = A_T e^{j(t\omega - k_2x)}$$

En  $x = 0$ , se satisfarán las siguientes condiciones de contorno:

- a) La función de onda debe ser la misma justo a la izquierda y a la derecha de la unión,

$$y_1(0,t) = y_2(0,t)$$

es decir la altura de la anilla,  $y(x,t)$ , es continua en  $x=0$ .

b) La cuerda de la izquierda ejerce sobre la anilla una fuerza vertical

$$- T_1 \left( \frac{\partial y_1}{\partial x} \right)_{x=0}$$

La cuerda que está a la derecha ejerce sobre la anilla una fuerza vertical

$$+ T_2 \left( \frac{\partial y_2}{\partial x} \right)_{x=0}$$

La suma de estas dos fuerzas debe ser igual a la masa de la anilla por su aceleración. Al considerar la masa despreciable, deberá cumplirse que

$$- T_1 \left( \frac{\partial y_1}{\partial x} \right)_{x=0} + T_2 \left( \frac{\partial y_2}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

que implica la continuidad de  $T \frac{\partial y}{\partial x}$ . Es de notar que solamente si la tensión de la cuerda en el equilibrio es la misma en todos los puntos de la misma, se verifica la continuidad de la pendiente. La aplicación de estas condiciones al caso de las ondas armónicas tomadas da:

$$A_I e^{jt\omega} + A_R e^{jt\omega} = A_T e^{jt\omega}$$

$$T_1 k_1 A_I e^{jt\omega} + T_1 k_1 A_R e^{jt\omega} = - T_2 k_2 A_T e^{jt\omega}$$

simplificando los términos  $e^{jt\omega}$ , y teniendo en cuenta que  $kT = \frac{\omega}{v} v^2 \mu = \omega v \mu = \omega Z$ , queda

$$A_I + A_R = A_T \quad \text{y} \quad A_I - A_R = \frac{Z_2}{Z_1} A_T$$

de donde, resolviendo

$$A_R = \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} A_I \quad (5.6)$$

$$A_T = \frac{2}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} A_I \quad (5.7)$$

Podemos introducir los coeficientes de reflexión y de transmisión, o refracción, como la relación de amplitudes  $r = \frac{A_R}{A_I}$  y  $t = \frac{A_T}{A_I}$  respectivamente; es inmediato ver que deben cumplir la relación

$$t - r = 1 \quad (5.8)$$

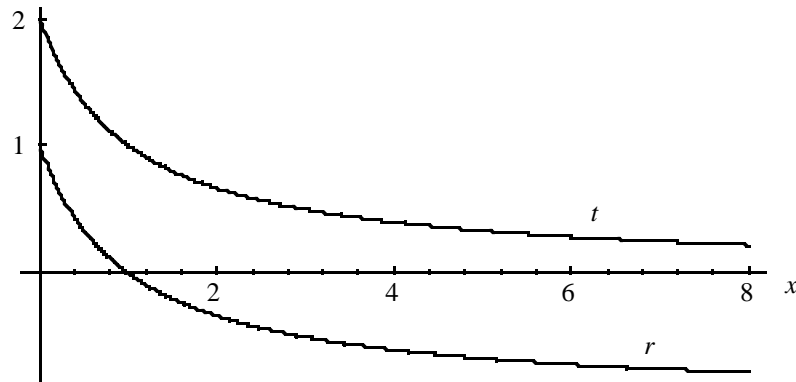


Fig. 5.5 Gráfica de los coeficientes de reflexión,  $r = \frac{A_R}{A_I}$  y de transmisión,  $t = \frac{A_T}{A_I}$  de amplitud en función del cociente de impedancias,  $x = \frac{Z_2}{Z_1}$

En la figura 5.5, se muestra su variación con el cociente de impedancias; se observa que cuando la impedancia del medio 2 es mayor que la del medio 1,  $x > 1$ , el coeficiente de reflexión de amplitudes es  $r < 0$ ; ésto no significa una amplitud negativa, que no tiene sentido, sino que hay una inversión de fase (cambio de fase igual a  $\pi$ ) en la onda reflejada respecto a la onda incidente.

### 5.5 Transmisión y reflexión de la energía de una onda progresiva

La potencia de una onda en una cuerda viene dada por la ecuación 5.5

$$\langle P \rangle = \eta v = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 Z$$

La conservación de la energía nos permite escribir que

$$P_I = P_T + P_R$$

y definiendo los coeficientes de transmisión,  $T$ , y de reflexión,  $R$ , de energía

$$T = \frac{P_T}{P_I} \quad R = \frac{P_R}{P_I}$$

se puede escribir

$$T + R = 1 \quad (5.8)$$

con

$$T = \frac{P_T}{P_I} = \frac{\frac{1}{2} \omega^2 A_T^2 Z_2}{\frac{1}{2} \omega^2 A_I^2 Z_1} = \left( \frac{A_T}{A_I} \right)^2 \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4 \frac{Z_2}{Z_1}}{\left( 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right)^2} \quad (5.9)$$

y

$$R = \frac{P_R}{P_I} = \frac{\frac{1}{2} \omega^2 A_R^2 Z_1}{\frac{1}{2} \omega^2 A_I^2 Z_1} = \left( \frac{A_R}{A_I} \right)^2 = \left( \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \right)^2 \quad (5.10)$$

En el gráfico de la figura 5.6 se observa que hay dos valores de  $x$  para los que la energía se reparte por igual entre la onda reflejada y la refractada, corresponden a  $x = 0,17$  y  $x = 5,8$ . Si ambas impedancias son iguales,  $x = 1$ , no existe onda reflejada.

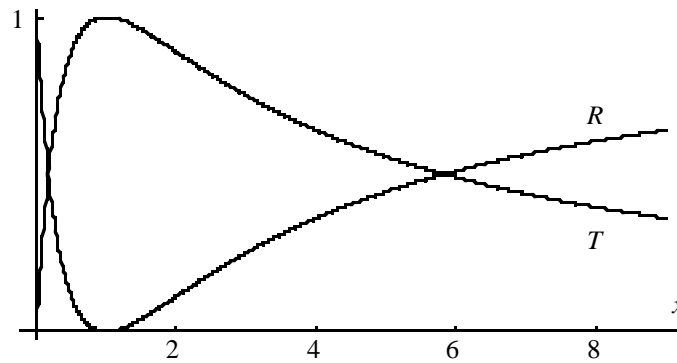


Fig. 5.6 Gráfica de los coeficientes de reflexión,  $R$  y de transmisión,  $T$  de energía en función del cociente de impedancias,  $x = \frac{Z_2}{Z_1}$

En las figuras 5.7 se ilustra qué sucede con un pulso que incide en un cambio de medio, según sea  $x < 1$ , o  $x > 1$ .

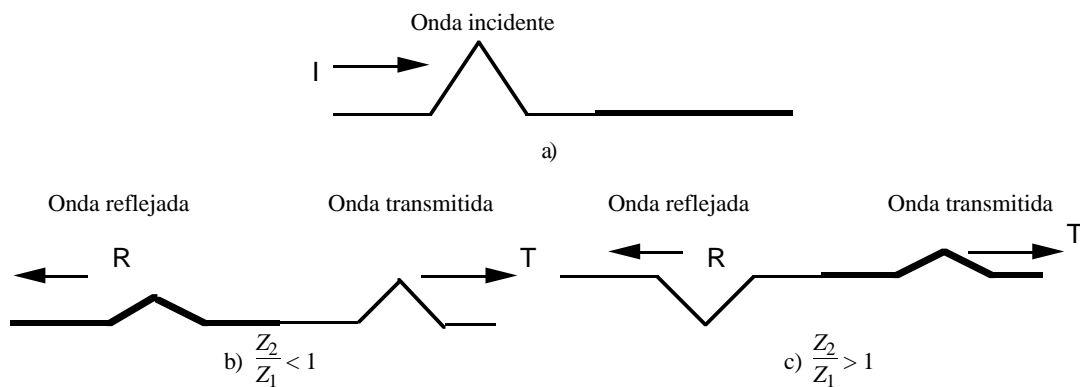


Fig. 5.7 Pulso incidente en un cambio de medio

**Ejercicio 5.7**

Supongamos que en una cuerda elástica tensa, se propaga la onda:

$$y(x,t) = 12(\text{mm})\text{sen}[ 40(\text{rad/m})x - 200(\text{rad/s})t ]$$

La densidad lineal de la cuerda es  $\mu = 40\text{g/m}$ . En  $x = a = 16\text{cm}$  cambia la densidad lineal de la cuerda, que pasa a ser mayor, manteniendo la misma tensión. Se observa que la intensidad de la onda reflejada es el 36% de la intensidad de la onda incidente.

- a) Escribir la función de onda de la onda reflejada.  
b) Escribir la función de onda de la onda transmitida.

**R:**

$$\text{a) } y_R = - 7,2(\text{mm})\text{sen}( 40(\text{rad/m})x + 200(\text{rad/s})t ]$$

$$\text{b) } y_T = 4,8(\text{mm})\text{sen}( 160(\text{rad/m})x - 200(\text{rad/s})t ]$$

**Ejemplo 5.1**

Un enfoque mecanicista

A.- Una partícula de masa  $m_1$  se desplaza con una velocidad  $u_1$  colisionando elásticamente con una partícula en reposo de masa  $m_2$

a-1) Determinar la expresión genérica de la energía cinética transferida a  $m_2$ .

a-2) ¿Qué valor debe tener el cociente  $m_2/m_1$  para que la energía transferida sea máxima?

B.- Una cuerda tensa consta de dos secciones de distintas densidades lineales de masa,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , que están sometidas a distintas tensiones,  $T_1$  y  $T_2$ . La impedancia mecánica de la primera sección vale  $Z_1$

$= \sqrt{T_1 \mu_1} = 4,0 \text{ N.s/m}$ . Una onda armónica que viaja por la sección  $Z_1$ , tiene una velocidad transversal máxima de  $u_1 = 3,0\text{m/s}$ , e incide sobre la sección  $Z_2$  produciéndose una onda reflejada de velocidad transversal máxima  $u_R$  y una onda transmitida de velocidad  $u_T$ .

b-1) Si la frecuencia de la onda es de  $\omega = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ , calcular la amplitud de la onda incidente  $A_1$ .

b-2) A partir de la expresión de la densidad de energía de una onda mecánica demostrar que su potencia transportada se puede expresar como  $P = Zu^2/2$ , donde  $u$  es la máxima velocidad transversal.

b-3) Si  $u_R = -2\text{m/s}$  calcular los valores de la potencia transmitida  $P_T$ , de los coeficientes de reflexión  $r$  y transmisión  $t$  de amplitudes, así como el valor de la velocidad  $u_T$ .

b-4) ¿Cuánto vale la impedancia  $Z_2$ ?

C.- Se puede establecer un modelo corpuscular de la reflexión ondulatoria donde las magnitudes corpusculares análogas a la impedancia, velocidad transversal y potencia son la masa, velocidad y energía. Verificarlo para los datos anteriores.

**Solución**

a-1) Si observamos la colisión desde el sistema de referencia centro de masa ambas partículas tienen cantidades de movimiento iguales en módulo, tanto antes como después de la colisión, ya que, al no haber fuerzas exteriores, la cantidad de movimiento permanece inalteradamente nula en dicho sistema de referencia. Por ser una colisión elástica se conserva la energía cinética, y como  $p_1 = p_2$  en el sistema c.d.m.

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_1^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_1'^2}{2m_2}$$

De donde

$$p_1^2 = p_1'^2$$

En el sistema de referencia del laboratorio, la velocidad de  $m_2$  después de la colisión será pues

$$u_T = v_{CM} + v_{CM} = 2v_{CM} = 2u_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

y como inicialmente su energía cinética era nula, la transferida será

$$E_{k,T} = \frac{1}{2} m_2 u_T^2 = \frac{1}{2} m_2 4u_1^2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{k,I}$$

a-2) La  $E_{k,T}$  será máxima cuando sea igual a la  $E_{k,I}$ , para lo que

$$\frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 1$$

que se verifica para  $m_2/m_1 = 1$

b-1) La ecuación de la onda armónica es de la forma  $y = A_I \cos(\omega t - kx)$  y la de la velocidad transversal

$$u_I(x,t) = \frac{dy}{dt} = -A_I \text{sen}(\omega t - kx)$$

siendo su valor máximo  $U_I = \omega A_I$ . De aquí,  $A_I = U_I/\omega = 3/10^3 = 3 \cdot 10^{-3}$  m

b-2) La densidad de energía de una onda en una cuerda viene dada por la ecuación 5.6

$$\eta = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2$$

como  $A \omega = u$ , podemos escribir  $\eta = 1/2 \mu u^2$ . Recordando la expresión dada de la impedancia en la fórmula 5.3

$$Z = \mu v$$

y como la potencia transportada es  $P = \eta v$ , sustituimos

$$P = \eta v = \frac{1}{2} \mu u^2 v = \frac{1}{2} Z u^2$$

b-3) Como el punto de unión de ambos medios no constituye ni un sumidero ni un generador de energía, deberá cumplirse que

$$P_I = P_R + P_T$$

de donde

$$P_T = P_I - P_R = \frac{Z_1}{2} [u_I^2 - u_R^2] = \frac{4}{2} [3^2 - 2^2] = 10 \text{ W}$$

El coeficiente de reflexión de amplitud será

$$r = \frac{A_R}{A_I} = \frac{u_R/\omega}{u_I/\omega} = \frac{u_R}{u_I} = \frac{-2}{3} = -0,67$$

la continuidad de la función de onda obliga a que  $A_I + A_R = A_T$ , o dividiendo por  $A_I$

$$t = 1 + r = 1 + \frac{-2}{3} = \frac{1}{3} = 0,33$$

Como

$$t = \frac{A_T}{A_I} = \frac{u_T}{u_I}$$

tenemos  $u_T = t u_I = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ ms}^{-1}$

b-4.- El valor de la impedancia  $Z_2$  es

$$Z_2 = \frac{2P_2}{v_T^2} = 20 \text{ Nms}^{-1}$$

c) Con los datos dados

$$E_{kI} = \frac{1}{2} 4,3^2 = 18 \text{ J} ; E_{kR} = \frac{1}{2} 4,2^2 = 8 \text{ J}$$

y de la conservación de la energía, la energía cinética transmitida valdrá  $E_{kT} = 18 - 8 = 10 \text{ J}$ , que se corresponde, en la analogía establecida, con  $P_T = 10 \text{ W}$  calculada en b.3.

De la conservación de la cantidad de movimiento en el choque  $4,3 = 4(-2) + m_2 u_T$ , de donde

$$m_2 u_T = 12 + 8 = 20 \text{ kg m s}^{-1}$$

y

$$m_2 = \frac{(m_2 u_T)^2}{2E_{kT}} = \frac{400}{2 \cdot 10} = 20 \text{ kg}$$

que corresponde a  $Z_2 = 20$  del modelo onda.

### Ejercicio 5.8

Un alambre de  $0,4 \text{ g/m}$  se mantiene tenso entre dos barras, según se indica en la figura 5.8.a. Si sus extremos se mantienen fijos, su frecuencia propia más baja es de  $300 \text{ Hz}$ .

a) ¿Cuál es la tensión del alambre?. Manteniendo constante la longitud del alambre, ¿qué podría hacerse para aumentar dicha frecuencia?.

En el mismo alambre, existe un pulso que en un instante está en la posición de la figura 5.8.b propagándose hacia la derecha.

b) ¿Cuánto tiempo tardará el alambre en adquirir de nuevo la misma forma? ¿Cuál será su forma en el tiempo mitad del calculado anteriormente?.



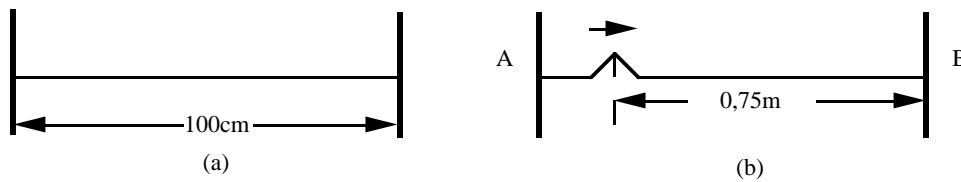


Fig. 5.8

c) Repita la pregunta b), suponiendo que el extremo  $B$  está sujeto a un anillo que puede deslizar libremente a lo largo de la barra.

**R :**

a) 144 N ; b) 3,3 ms ; c) 2,5 ms

### Ejercicio 5.9

Una cuerda de acero de densidad  $8,0\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$  y un diámetro de 2,0mm, podemos considerarla como perfectamente elástica. La cuerda tiene 2 m de longitud y está unida a otra, de igual impedancia, cuyo extremo más alejado está en el infinito. El extremo de la primera cuerda, en  $x=0$ , se hace oscilar con una frecuencia  $f=20\text{Hz}$  y con una amplitud de 2,0 mm. La velocidad de fase es de 10 m/s.

a) Escribir la ecuación de movimiento de un punto de la cuerda situado en  $x=120\text{ cm}$  ¿cómo será el movimiento de un punto situado a 145 cm?

b) Supongamos todas las condiciones del apartado anterior, excepto que se ha sustituido la segunda cuerda por otra del mismo material, pero de mayor diámetro, observándose, entonces, que la intensidad de la onda transmitida es el 64% de la intensidad de la onda incidente. Si la tensión es siempre la misma, determinar la amplitud de la onda transmitida y escribir la ecuación de onda. Lo mismo para la onda reflejada, ¿se podría conseguir el mismo coeficiente de transmisión disminuyendo el diámetro?

**R :**

b) 0,8 mm ; 1,2 mm

## 6 Ondas acústicas

### 6.1 Ondas longitudinales en un medio elástico lineal

Estudiemos, con un cierto detalle, las ondas elásticas que se propagan en un gas debido a variaciones de presión. Consideremos un tubo de sección recta constante y área  $A$ , que contiene el gas.

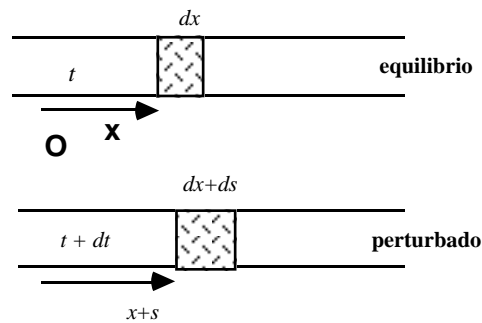


Fig. 6.1

Sean  $p_0$  y  $\rho_0$  la presión y la densidad, en condiciones de equilibrio, y consideremos que todas las partículas de una sección recta sufren el mismo desplazamiento con la perturbación.

Al variar la presión el elemento de volumen  $A dx$ , figura 6.1, se desplaza de tal forma que la cara situada en  $x$  va a  $x+s$  y la situada en  $x+dx$  va a  $x+s+dx+ds$ , variando pues el espesor. Como la masa debe conservarse

$$M = \rho_0 A dx = \rho A (dx + ds)$$

siendo  $\rho$  la densidad del gas perturbado. Simplificando podemos escribir

$$\rho_0 = \rho \left( 1 + \frac{\partial s}{\partial x} \right)$$

en donde se ha escrito derivada parcial ya que  $s$  es no sólo función de  $x$  sino también una función del tiempo. Si escribimos  $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ , tenemos

$$\rho = (\rho_0 + \Delta\rho) \left( 1 + \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} + \Delta\rho + \Delta\rho \frac{\partial s}{\partial x}$$

despreciando el último término frente a los dos anteriores, ya que ambos factores son generalmente pequeños, y simplificando  $\rho_0$

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} \quad (6.1)$$

Así la variación de presión provoca una variación de densidad de la que hemos determinado la ecuación 6.1. Por otra parte, la presión está relacionada con la densidad mediante una ecuación,  $p = p(\rho)$ , que recibe el nombre de ecuación de estado, que no conocemos; a pesar de ello, como quiera que las variaciones de densidad son pequeñas, podemos imaginar la función desconocida  $p = p(\rho)$  desarrollada en serie de Taylor, en torno a la posición de equilibrio  $\rho = \rho_0$ , y quedarnos con la aproximación lineal

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \Delta\rho$$

Veamos una expresión alternativa a la derivada que aparece. Como  $M = V\rho$ , diferenciando

$$0 = \rho dV + Vd\rho$$

de donde

$$-\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}$$

El módulo elástico para un gas es el módulo de compresibilidad  $B$ , que relaciona el esfuerzo (sobrepresión) y la deformación (variación unitaria de volumen), y por lo tanto también la variación unitaria de densidad

$$B = -V_0 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_0 = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \quad (6.2)$$

de donde podemos escribir

$$p - p_0 = \frac{B}{\rho_0} \Delta\rho \quad (6.3)$$

que relaciona la presión y la densidad en cualquier punto y que con la ecuación 6.1 nos permite escribir

$$p - p_0 = -B \frac{\partial s}{\partial x} \quad (6.4)$$

que relaciona la presión en cualquier punto con la deformación.

Añadiendo la ecuación de movimiento obtenida aplicando la segunda ley de Newton a la masa,  $\rho_0 A dx$ , mostrada en la figura 6.2



Fig. 6.2

tenemos

$$-A dp = \rho_0 A dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

que podemos escribir

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (6.5)$$

que relaciona el campo de presiones y el de desplazamientos.

Para obtener la variación con el espacio y el tiempo de  $s$ ,  $p$ , o  $\rho$  basta eliminar las otras variables. Así, derivando la ecuación 6.4 respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -B \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

y sustituyendo en 6.5

$$B \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (6.6)$$

obteniendo una ecuación de onda. De lo que se concluye que el desplazamiento producido por la perturbación de la presión se propaga según el modelo ondulatorio a una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \quad (6.7)$$

Para obtener la propagación de la perturbación de la presión, derivemos la ecuación 6.4 dos veces respecto al tiempo

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -B \frac{\partial^3 s}{\partial t^2 \partial x}$$

y la ecuación 6.5 una vez respecto a  $x$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial t^2}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (6.8)$$

ecuación de propagación de la onda de presión que se desplaza, obviamente, a la misma velocidad que la onda de desplazamiento.

Como la ecuación constitutiva 6.3 indica la existencia de una proporcionalidad entre  $p$  y  $\rho$  en cualquier punto, podemos escribir directamente

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (6.9)$$

La ecuación 6.4 nos permite relacionar la onda de desplazamiento y la de presión. Si suponemos una onda armónica de desplazamiento:

$$s = s_0 \cos(kx - \omega t)$$

o bien

$$s = s_0 e^{j(kx - \omega t)}$$

entonces

$$\frac{\partial s}{\partial x} = j k s_0 e^{j(kx - \omega t)}$$

y

$$\Delta p = -B \frac{\partial s}{\partial x} = -j B k s$$

es decir, la onda de presión oscila alrededor de su valor de equilibrio  $p_0$ , con una amplitud

$$\Delta p_{\max} = B k s_0 = v^2 \rho_0 k s_0 = v \rho_0 \omega s_0 \quad (6.10)$$

Observemos, también, que la presión acústica,  $\Delta p$ , está retrasada  $\pi/2$  respecto a la onda de desplazamiento elástico. Así, el máximo desplazamiento corresponde a un nodo de presión.

## 6.2 Impedancia. Intensidad

Para determinar la impedancia característica de una onda plana sonora, calculemos la velocidad de desplazamiento de las partículas,  $u$ :

$$u = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega j s = \frac{\omega}{k} \frac{\Delta p}{B} = \frac{v}{B} \Delta p$$

y de la definición de impedancia

$$\frac{\Delta p}{u} = \frac{B}{v} = \rho_0 v = Z \quad (6.11)$$

Para el aire en condiciones normales  $Z = \sqrt{B\rho_0} = 427 \frac{\text{N/m}^2}{\text{m/s}}$ .

La potencia transmitida por la onda es

$$P = F \cdot u = A \Delta p \cdot u = A u^2 Z$$

En lugar de la potencia, se acostumbra a definir la intensidad de una onda o energía que, transportada por la onda, atraviesa la unidad de superficie en la unidad de tiempo. Para una onda armónica:

$$I = \frac{\langle P \rangle}{A} = Z \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} Z \omega^2 s_0^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_0^2 v = \eta v$$

donde  $\eta = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_0^2$  es la energía media por unidad de volumen.

### Ejercicio 6.1

La intensidad de una onda sonora, de frecuencia 500 Hz que se propaga por el aire es de 1,0 mW/m<sup>2</sup>

- ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones producidas?
  - ¿Cuál es la amplitud de la onda de presión?
- Otra onda, de igual intensidad, se propaga en el agua
- ¿Qué amplitud tiene la onda de presión?

**R:**

- 2,2 μm, b) 2,9·10<sup>-2</sup> Pa, c) 1,7 Pa

### 6.3 Reflexión de una onda de presión

Nos planteamos de nuevo el problema de qué sucede cuando una onda progresiva llega a la superficie de separación entre dos medios de impedancias distintas y, por lo tanto, en los que las condiciones de propagación son distintas. Estas condiciones pueden darse, en el caso de las ondas elásticas que se propagan en un gas, si a partir de una sección recta del tubo considerado cambia la temperatura del gas, o cambia el tipo de gas, de tal forma que cambian densidad,  $\rho_0$ , y velocidad de propagación,  $v$ , de la onda. Aunque el tratamiento del problema es análogo al estudiado en el caso de la cuerda, lo repetiremos paso a paso.

Consideremos una onda de presión armónica que se propaga en el sentido positivo de las  $x$ ; hacemos coincidir el origen de coordenadas con la separación entre los dos medios, como se muestra en la figura 6.3.

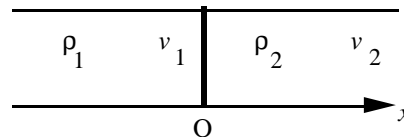


Fig. 6.3

De la definición de impedancia, ecuación 6.11, deberá cumplirse

$$Z_1 = \rho_1 v_1 = \left( \frac{\Delta p_1}{u_1} \right)_{x \leq 0}$$

y

$$Z_2 = \rho_2 v_2 = \left( \frac{\Delta p_2}{u_2} \right)_{x \geq 0}$$

además, la continuidad del gas implica que, en  $x = 0$

$$(p_1)_{x=0} = (p_2)_{x=0} \quad (6.12)$$

y la ausencia de fuentes o sumideros de gas en  $x = 0$  exige que el flujo de gas,  $Au$ , tenga el mismo valor a uno y otro lado de la frontera, así deberá cumplirse

$$(Au_1)_{x=0} = (Au_2)_{x=0} \quad (6.13)$$

estas condiciones únicamente se pueden cumplir si  $Z_1 = Z_2$ . En caso contrario no resulta admisible la existencia de una única onda progresiva; es necesario complicar la solución admitiendo que no se transmite toda la onda incidente del medio 1 al medio 2, sino que hay también una onda reflejada por la discontinuidad que separa los medios. Esta onda se propaga en el medio 1, en el sentido negativo de las  $x$ , superponiéndose a la onda incidente, por lo tanto

$$\Delta p = A_I e^{j(\omega t - kx)} + A_R e^{j(\omega t + kx)}$$

Utilizando la ecuación 6.5

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

obtenemos

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{jk}{\rho_1} [A_I e^{j(\omega t - kx)} - A_R e^{j(\omega t + kx)}]$$

de donde

$$u_1(x, t) = \frac{k}{\rho_1 \omega} [A_I e^{j(\omega t - kx)} - A_R e^{j(\omega t + kx)}]$$

y en  $x = 0$ , se tiene

$$\left(\frac{\Delta p_1}{u_1}\right)_{x=0} = \frac{A_I e^{j\omega t} + A_R e^{j\omega t}}{\frac{k}{\rho_1 \omega} [A_I e^{j\omega t} - A_R e^{j\omega t}]} = Z_1 \frac{A_I + A_R}{A_I - A_R}$$

En  $x > 0$  se propaga únicamente la onda transmitida de la que aceptamos que tiene la misma frecuencia que la onda incidente (así será para los medios lineales, únicos que aquí consideramos). Satisfará

$$\left(\frac{\Delta p_2}{u_2}\right)_{x \geq 0} = \rho_2 v_2 = Z_2$$

por lo que las condiciones de frontera quedarán satisfechas siempre que

$$Z_1 \frac{A_I + A_R}{A_I - A_R} = Z_2 \quad (6.14)$$

o lo que es equivalente, existirá una onda reflejada de presión cuya amplitud será

$$A_R = A_I \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = r A_I \quad (6.15)$$

La amplitud de la onda reflejada es tanto mayor cuanto mayor es el desajuste entre las dos impedancias. Inversamente, si se desea evitar reflexiones hay que adaptar las impedancias de los dos medios. La onda de presión se refleja sin cambio de signo (fase) al incidir sobre un medio de impedancia infinita, como el extremo cerrado de un tubo; las presiones de las dos ondas, la incidente y la reflejada, se suman en el extremo cerrado dando el doble de lo que habría si continuara el tubo. Se observa que el coeficiente de reflexión de amplitud,  $r$ , para la onda de presión es opuesto al obtenido para la onda transversal en la cuerda. En la figura 6.4 se muestra la dependencia de los coeficientes de reflexión,  $r$ , y transmisión  $t = 1+r$ , con el cociente de impedancias.

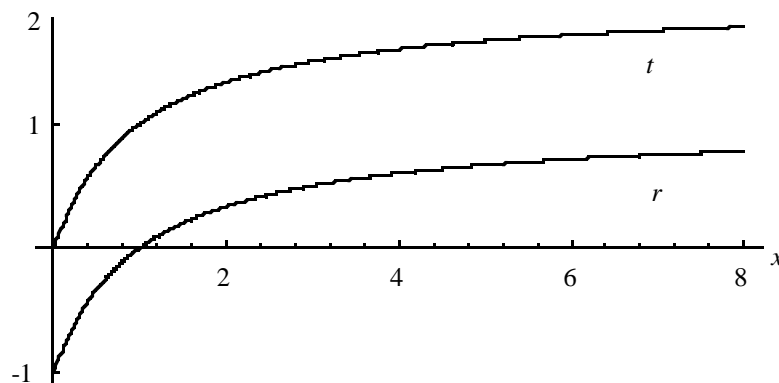


Fig. 6.4 Gráfica de los coeficientes de reflexión,  $r$  y de transmisión,  $t$  de amplitud en función del cociente de impedancias,  $x = \frac{Z_2}{Z_1}$

Como el coeficiente de reflexión de la energía es  $R = (r)^2$ , el comportamiento de las ondas acústicas es igual que el de las ondas transversales en la cuerda, desde el punto de vista de reflexión y transmisión de la energía.

En la tablas 6.1 se muestran los coeficientes de reflexión y transmisión de amplitudes e intensidades para ondas transversales en una cuerda y para ondas acústicas en un fluido.

Tabla 6.1.a Coeficientes de reflexión y transmisión de amplitudes e intensidades para el caso  $Z_2 \ll Z_1$

Onda	$r$	$t$	$R$	$T$
trans.cuerda	$\approx 1$	$\approx 2$	$\approx 1$	$\approx 0$
acústica	$\approx -1$	$\approx 0$	$\approx 1$	$\approx 0$



Tabla 6.1.b Coeficientes de reflexión y transmisión de amplitudes e intensidades para el caso  $Z_2 \gg Z_1$ 

Onda	$r$	$t$	$R$	$T$
trans.cuerda	$\approx -1$	$\approx 0$	$\approx 1$	$\approx 0$
acústica	$\approx 1$	$\approx 2$	$\approx 1$	$\approx 0$

#### 6.4 Ondas sonoras. Velocidad de fase del sonido

Hemos obtenido  $v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$ , donde el módulo de compresibilidad viene dado por la ecuación 6.2. En sus investigaciones sobre el sonido, Newton supuso que las fluctuaciones de presión ocurrían isotérmicamente (a temperatura constante). Por medio de la ley de Boyle podemos, según esa hipótesis, calcular  $(dp/dV)_0$  y de ahí la velocidad del sonido. Para condiciones normales este cálculo nos daría un valor de la velocidad del sonido en el aire de  $280 \text{ ms}^{-1}$ , muy alejado del valor experimental (aproximadamente  $330 \text{ ms}^{-1}$ ). Sabemos que el tiempo de cambio entre posiciones de compresión y rarefacciones es demasiado rápido para que pueda haber intercambio de calor entre masas adyacentes de gas. Por lo tanto la temperatura fluctuará. La termodinámica demuestra que en un proceso sin intercambio de calor, o adiabático, la relación entre la presión y el volumen es:

$$pV^\gamma = \text{constante}$$

donde  $\gamma$  es igual a la relación entre calores específicos a presión y volumen constantes. Valor que supondremos constante para un gas; para el aire en condiciones normales  $\gamma = 7/5$ . Podemos calcular la velocidad de la onda acústica en el aire considerando su propagación como un proceso adiabático, como

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma-1}$$

y en el equilibrio, con  $V = V_0$ , tenemos

$$B = -V_0(-\gamma p_0 V_0^\gamma V_0^{-\gamma-1}) = \gamma p_0 \quad (6.16)$$

y tomando  $\rho_0 = 1,29 \text{ kg m}^{-3}$ , en condiciones normales de presión y temperatura

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 331 \text{ m/s}$$

más de acuerdo con el valor experimental, por lo que adoptaremos un modelo adiabático para las fluctuaciones de presión que acompañan a una onda sonora en el aire.

### 6.5 Audición. Nivel de intensidad

El oído humano medio tiene un umbral de audición que varía fuertemente con la frecuencia. A la frecuencia de 1kHz es  $I_0=10^{-12} \text{ W/m}^2$  mientras que el umbral doloroso es  $10^0 \text{ W/m}^2$ . El oído percibe, pues, un rango enorme de intensidades ¡doce órdenes de magnitud!

A la intensidad física de la onda sonora armónica le corresponde una sonoridad percibida por la persona, la correlación entre intensidad y sonoridad es tal que a intervalos iguales de sonoridad percibida le corresponden, aproximadamente, múltiplos iguales de intensidad.

Esta razón y la gran amplitud de valores de la intensidad, hacen adecuado medir la intensidad mediante el *nivel de intensidad* del sonido  $\beta$  definido así:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (6.17)$$

donde  $I_0$  corresponde al umbral de audición a 1kHz. Aunque  $\beta$  es adimensional se le asignan unas unidades denominadas decibelio, dB, en honor de A.G.Bell.

A los valores extremos de  $I$ , a 1kHz les corresponde:

$$\beta (10^{-12} \text{ Wm}^{-2}) = 0, \quad \text{y} \quad \beta (10^0 \text{ Wm}^{-2}) = 120 \text{ dB}$$

mientras que una conversación estará en torno de los 50 dB. Por otra parte la discriminación entre intensidades es mayor que 1 dB.

#### Ejercicio 6.2

- El oído es sensible a frecuencias sonoras en el margen comprendido entre 20 Hz y 20000 Hz aproximadamente. ¿Cuáles son las longitudes de onda en el aire correspondientes a dichas frecuencias?, ¿y en el agua? ( $v_{\text{prop. agua}}=1485 \text{ ms}^{-1}$ ).
- La nota *do mayor* de la escala musical tiene una frecuencia de 262 Hz, ¿cuál es la longitud de onda de esta nota en el aire?
- El ojo es sensible a ondas electromagnéticas cuyas longitudes de onda están en el margen comprendido entre  $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  y  $7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  aproximadamente, ¿cuáles son las frecuencias correspondientes a estas ondas luminosas?
- Frecuencias típicas de ondas electromagnéticas de radio son: 100 kHz en el caso de AM y 100 MHz para FM. Calcular las longitudes de onda correspondientes a estas frecuencias. (Todas las ondas electromagnéticas se mueven a la velocidad de la luz).

#### Ejercicio 6.3

Una persona de buen oído puede percibir  $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$  a 100 Hz:

- ¿Cuál es la amplitud de desplazamiento que corresponde?
- A esta frecuencia la amplitud de la onda de presión del sonido tolerable más intenso es de unos 20 Pa:
- ¿Cuál es el desplazamiento correspondiente?
  - Calcular las intensidades para ambos umbrales.

**R:**

- a)  $7,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ , b)  $7,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ , c)  $4,6 \cdot 10^{-9} \text{ Wm}^{-2}$ ,  $0,46 \text{ Wm}^{-2}$

**Ejercicio 6.4** .....

- a) ¿Cuál es el nivel de intensidad, en decibelios, correspondiente a una onda sonora de intensidad  $1,0 \cdot 10^{-10} \text{ W.m}^{-2}$  ?
- b) ¿Y a una onda de intensidad  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-2}$  ?
- c) ¿Qué fracción de potencia acústica de un ruido deberá eliminarse para disminuir su nivel de intensidad sonora de 90 a 70 dB?

**R:**

- a) 20 dB ; b) 100 dB ; c) 99 %

**Ejercicio 6.5** .....

Una cuerda de piano afinada a la frecuencia de 440 Hz (nota *la*), puede quedar modelizada como un oscilador de  $Q = 1600$ . Al pulsar la tecla de esta nota un espectador percibe una intensidad sonora de 65dB; a esta frecuencia el nivel mínimo audible es de 8dB. Estimar el tiempo durante el cual el espectador oirá la nota.

**R:**

$$t \approx 8\text{s}$$

.....

## 7 Ondas electromagnéticas

### 7.1 Ondas electromagnéticas en el vacío

Las ecuaciones de Maxwell suponen una descripción completa de los campos eléctrico y magnético y vamos a ver que se pueden combinar originando dos ecuaciones diferenciales de onda, una para el campo eléctrico y otra para el magnético. Esta combinación podemos hacerla partiendo de las ecuaciones de Maxwell escritas en forma integral o en forma diferencial.

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ley de Faraday-Henry	$\nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Ley de Ampère-Maxwell	$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \left( \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

Para el caso particular del vacío, ausencia de cargas y corrientes,  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  y  $\mu = \mu_0$ , estas ecuaciones quedan de la forma

Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ley de Faraday-Henry	$\nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Ley de Ampère-Maxwell	$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

El operador  $\nabla$  es un operador en derivadas espaciales primeras y las derivadas temporales que aparecen también son primeras derivadas, por lo tanto si las ecuaciones de Maxwell deben dar una ecuación de onda, necesitamos introducir derivadas segundas respecto a las variables. Para ello tomemos rotacional en la ecuación de la ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \nabla \wedge \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (7.1)$$

el doble producto vectorial del primer miembro se puede transformar recordando la igualdad vectorial

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

así

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (7.2)$$

en donde se ha tenido en cuenta la ley de Gauss para el campo magnético,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . En el segundo miembro de la ecuación 7.1 podemos substituir el rotacional del campo eléctrico por la derivada temporal del campo magnético con el signo cambiado, como dice la ley de Faraday, así

$$\nabla \wedge \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \nabla \wedge \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (7.3)$$

volviendo a igualar los dos miembros tras las transformaciones dadas por las ecuaciones 7.2 y 7.3 tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

que tiene la forma de la ecuación diferencial de onda. Podemos seguir un camino análogo para encontrar que el campo eléctrico también da lugar a una ecuación de onda. Tomando rotacional en la ley de Faraday

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{B})$$

el rotacional de  $\mathbf{B}$  del segundo miembro puede substituirse por su equivalente dado por la ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

y como  $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ , ya que por la ley de Gauss del campo eléctrico en el vacío  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , tenemos la ecuación diferencial de onda para  $\mathbf{E}$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

## 7.2 Ondas electromagnéticas planas polarizadas en el vacío

Independientemente de lo anterior, consideremos que las ecuaciones de Maxwell admiten como solución particular un campo eléctrico y un campo magnético perpendiculares entre sí. Veremos que esta solución corresponde a ondas electromagnéticas planas transversales, con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  perpendiculares a la dirección de propagación.

Tomemos un sistema de referencia en el que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  sean de la forma

$$\mathbf{E} = E(\mathbf{r}, t)\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{B} = B(\mathbf{r}, t)\mathbf{k}$$

y veamos si estos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

Como  $\mathbf{E}$  sólo tiene componente según el eje  $y$ , por la ley de Gauss, debe cumplir que su divergencia sea nula, debe cumplirse

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \cdot E \mathbf{j} = \frac{\partial E}{\partial y} = 0$$

y por lo tanto  $E(\mathbf{r}, t)$  debe ser independiente de  $y$ , o sea de la forma  $E(x, z, t)$ . Análogamente de la ley de Gauss para el magnetismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \cdot B \mathbf{k} = \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

y por lo tanto  $B(\mathbf{r}, t)$ , de la forma  $B(x, y, t)$ .

Como  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  deben satisfacer la ley de Faraday

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = \nabla \wedge E \mathbf{j} = - \frac{\partial E}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial E}{\partial x} \mathbf{k} \equiv - \frac{\partial B}{\partial t} \mathbf{k}$$

debe, por una parte, cumplirse

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0$$

y por lo tanto  $E(\mathbf{r}, t)$  debe ser de la forma  $E(x, t)$ . Y de la igualdad de componentes según  $\mathbf{k}$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (7.4)$$

Análogamente, de la ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla \wedge B \mathbf{k} = \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{j} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \mathbf{j}$$

de donde

$$\frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

y por lo tanto  $B(\mathbf{r}, t)$  será de la forma  $B(x, t)$ . Y de la igualdad de componentes según  $\mathbf{j}$

$$- \frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (7.5)$$

Derivando la ecuación 7.4 respecto de  $x$  y la ecuación 7.5 respecto de  $t$  y combinando los resultados se tiene que  $E(x, t)$  debe satisfacer

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (7.6)$$

Obtendríamos una ecuación diferencial de onda semejante para  $B$ , derivando la ecuación 7.4 respecto de  $t$  y la ecuación respecto de  $x$  y combinando los resultados de forma adecuada. De la ecuación de onda 7.6 obtenemos que el campo eléctrico se propaga en la dirección del eje  $x$  a velocidad  $c$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

y se puede expresar como

$$E(x,t) = E(x - ct)$$

Un tipo particular de estas funciones, solución de la ecuación diferencial 7.6, es la de una onda armónica que podemos escribir

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{j} \quad (7.7)$$

El campo magnético queda determinado, salvo una constante, a partir de la ecuación 7.4, o de la 7.5, así

$$B_z = B(x,t) = - \int \frac{\partial E}{\partial x} dt = E_0 k \int \sin(kx - \omega t) dt = \frac{E_0 k}{\omega} \cos(kx - \omega t) = B_0 \cos(kx - \omega t)$$

con

$$cB_0 = E_0 \quad (7.8)$$

siendo  $c = \omega/k$  la velocidad de fase de la onda. La constante de integración no se ha escrito ya que representa un campo independiente del tiempo y, por lo tanto, sin carácter ondulatorio. Podemos escribir

$$\mathbf{B} = B_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{k}$$

Si la onda eléctrica se propaga hacia la izquierda vendrá representada por  $\mathbf{E} = E_0 \cos(kx + \omega t) \mathbf{j}$ . El cálculo del campo magnético nos daría  $\mathbf{B} = -B_0 \cos(kx + \omega t) \mathbf{k}$ . Resumiendo, como  $E$  y  $B$  difieren solamente en el escalar  $c$  y tienen la misma dependencia del tiempo,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  están en fase en todos los puntos del espacio vacío, son perpendiculares entre sí y la dirección de propagación es la del vector  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ .

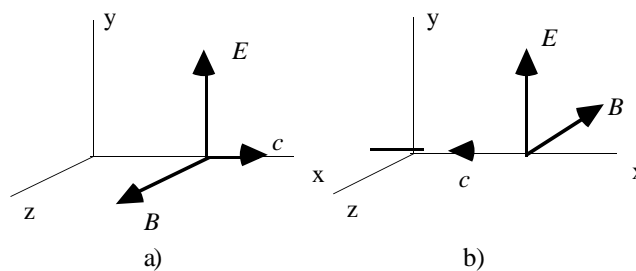


Fig. 7.1 Onda plana electromagnética propagándose: a) según  $+x$  y b) según  $-x$

La onda descrita por la ecuación 7.7 se dice que es una onda *polarizada linealmente*; está caracterizada por el hecho de que el vector  $\mathbf{E}$  está siempre en un plano, en este caso el  $xy$ .

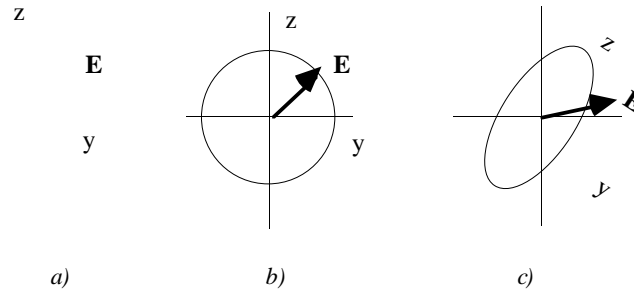


Fig. 7.2 Vector campo eléctrico en una onda plana: a) polarizada linealmente, b) polarizada circularmente y c) polarizada elípticamente

En general, una onda plana que se propaga en la dirección  $x$  puede considerarse como superposición de dos ondas polarizadas linealmente en direcciones perpendiculares; si están en fase y la relación entre amplitudes permanece constante la onda está polarizada *linealmente*, si entre ambas hay una diferencia de fase constante y tienen diferentes amplitudes se dice que la onda plana está polarizada *elípticamente*; si las amplitudes son iguales y la diferencia de fase es  $\pi/2$  se dice que la onda plana está polarizada *circularmente*. En general

$$\mathbf{E} = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \theta_1) \mathbf{j} + E_{0z} \cos(kx - \omega t + \theta_2) \mathbf{k}$$

con  $\theta_2 - \theta_1 = \text{constante}$ . Si  $\theta_2 - \theta_1 = 0$  y  $E_{0z}/E_{0y} = \text{constante}$ ,  $\mathbf{E}$  está siempre sobre la misma recta soporte, figura 7.2.a. Si  $E_{0y} = E_{0z}$  y la diferencia de fase es  $\pi/2$ ,  $\mathbf{E}$  gira en el plano  $yz$  describiendo un círculo, figura 7.2.b; si  $E_{0y} \neq E_{0z}$ ,  $\mathbf{E}$  describe una elipse, figura 7.2.c.

### Ejemplo 7.1

Una onda electromagnética plana polarizada linealmente se propaga, en el vacío, en el sentido positivo del eje de las  $z$ . La amplitud del campo eléctrico es  $E_x = 10 \text{ Vm}^{-1}$  y su longitud de onda 30m.

- Determinar la frecuencia de la onda
- Escribir las expresiones correspondientes a los campos vectoriales eléctrico y magnético

#### Solución

a) La longitud de onda y la frecuencia de la onda están relacionadas, para una onda plana propagándose en el vacío, por

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

así

$$f = \frac{3 \cdot 10^8}{30} = 10^7 \text{ Hz} = 10 \text{ MHz}$$

b) El número de onda  $k$ , valdrá



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{30} = 0,21 \text{ m}^{-1}$$

y la expresión del campo eléctrico será

$$\mathbf{E} = 10\cos(2\pi \cdot 10^7 t - 0,21z + \phi)\mathbf{i}$$

Como la onda se propaga según  $+z$  y el campo eléctrico oscila según  $x$ , el campo magnético lo hará según  $y$ . Las amplitudes de los campos eléctrico y magnético están relacionadas según la ecuación 7.8,  $cB_0 = E_0$  y por lo tanto la expresión del campo magnético será

$$\mathbf{B} = 3,3 \cdot 10^{-8} \cos(2\pi \cdot 10^7 t - 0,21z + \phi)\mathbf{j}$$

### Ejercicio 7.1

Una onda electromagnética plana polarizada linealmente se propaga, en el vacío, en el sentido positivo del eje de las  $z$ . La frecuencia de la onda es 1,2 GHz y el campo eléctrico está orientado según  $x$ , alcanzando un valor máximo de  $100 \text{ Vm}^{-1}$  en  $t = 0$  y  $z = 0,25 \text{ m}$ . Escribir las expresiones correspondientes a los campos vectoriales eléctrico y magnético.

**R:**

$$\mathbf{E} = 100\cos(24\pi \cdot 10^8 t - 8\pi \cdot z + 2\pi)\mathbf{i}; \mathbf{B} = 3,3 \cdot 10^{-7} \cos(24\pi \cdot 10^8 t - 8\pi \cdot z + 2\pi)\mathbf{j}$$

## 7.3 Desde las ecuaciones de Maxwell en forma integral

Para aquellos lectores que no estén familiarizados con la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell llegaremos, ahora, a las ecuaciones de onda partiendo de dichas ecuaciones en forma integral, que recordamos a continuación

Ecuaciones de Maxwell en forma integral

Ley de Gauss para el campo eléctrico  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \oint \rho \, dv$

Ley de Gauss para el campo magnético  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$

Ley de Faraday-Henry  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$

Ley de Ampère-Maxwell  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left[ \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \right]$

Simplificaremos el problema puesto que conocemos el resultado buscado; recordemos: pretendemos establecer la compatibilidad de la existencia de ondas planas electromagnéticas, propagándose en el vacío, con las ecuaciones de Maxwell. Por ello no nos interesa la presencia o no de ningún campo

constante; aceptando que la dirección de propagación de las ondas planas es la del eje  $x$  los campos pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,t) \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(x,t)$$

que deben ser compatibles con las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\text{Ley de Gauss} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (7.9)$$

$$\text{Ley de Gauss para el campo magnético} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (7.10)$$

$$\text{Ley de Faraday} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (7.11)$$

$$\text{Ley de Ampère-Maxwell} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (7.12)$$

Empecemos imponiendo al campo eléctrico,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,t)$ , la obligación de cumplir con la ley de Gauss dada por la ecuación 7.9. Tomemos como superficie de integración, o superficie de Gauss, el paralelepípedo  $\Delta x \Delta y \Delta z$  de la figura 7.4

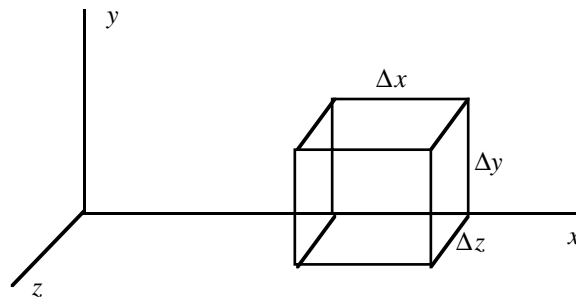


Fig. 7.4

deberá cumplirse

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

área del paralelepípedo

Para el cálculo de la integral hemos separado las seis caras en tres pares; para el par de la figura 7.5.a, el campo tiene el mismo valor,  $E_z(x,t) \mathbf{k}$ , al ser independiente de  $z$  y los vectores diferenciales de superficie son:

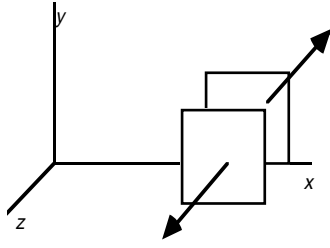


Fig. 7.5.a

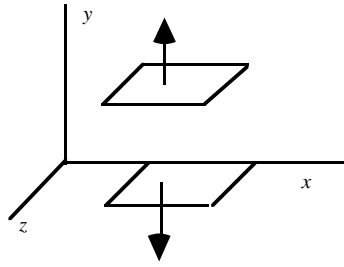


Fig. 7.5.b

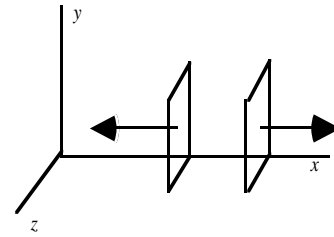


Fig. 7.5.c

$d\mathbf{A}_1 = -dx dy \mathbf{k}$  para la cara posterior de la figura y  $d\mathbf{A}_2 = dx dy \mathbf{k}$  para la anterior. El flujo a través de las dos caras será

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \int_{\text{área de la cara}} E_z(x,t) \mathbf{k} d\mathbf{A}_1 + \int_{\text{área de la cara}} E_z(x,t) \mathbf{k} d\mathbf{A}_2 = 0$$

ya que  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son iguales y de signo contrario.

De manera análoga para las dos caras de la figura 7.5.b el campo tiene el mismo valor,  $E_y(x,t) \mathbf{j}$ , al ser independiente de  $y$ ; los vectores diferenciales de superficie son  $d\mathbf{A}_3 = dx dz \mathbf{j}$  para la cara superior de la figura y  $d\mathbf{A}_4 = -dx dz \mathbf{j}$  para la inferior. El flujo a través de las dos caras será

$$\Phi_3 + \Phi_4 = \int_{\text{área de la cara}} E_y(x,t) \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}_3 + \int_{\text{área de la cara}} E_y(x,t) \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}_4 = 0$$

Para las dos caras de la figura 7.5.c tenemos: para la de la izquierda un vector diferencial de superficie  $d\mathbf{A}_5 = -dy dz \mathbf{i}$  y un campo,  $E_x(x,t) \mathbf{i}$ ; para la cara de la derecha  $d\mathbf{A}_6 = dy dz \mathbf{i}$  y  $E_x(x+dx, t) \mathbf{i}$ ; el flujo

$$\Phi_5 + \Phi_6 = \int_{\text{área cara}} E_x(x,t) \mathbf{i} \cdot d\mathbf{A}_5 + \int_{\text{área cara}} E_x(x+dx,t) \mathbf{i} \cdot d\mathbf{A}_6 = 0$$

que debe ser nulo por aplicación de la ley de Gauss a todo el paralelepípedo. Haciendo el producto escalar y como  $E_x$  es independiente de  $y$  y de  $z$  pueden salir de las integrales

$$-E_x(x,t) \int_{\text{área cara}} dy dz + E_x(x+dx,t) \int_{\text{área cara}} dy dz = [-E_x(x,t) + E_x(x+dx,t)] \int_{\text{área cara}} dy dz = 0$$

simplificando el área de la cara tenemos que la aplicación de la ley de Gauss obliga a que

$$-E_x(x,t) + E_x(x+dx,t) = 0$$

lo que significa que  $E_x$  no depende de  $x$  por lo que el campo eléctrico ondulatorio será

$$\mathbf{E}(x,t) = E_y(x,t) \mathbf{j} + E_z(x,t) \mathbf{k}$$

es decir es transversal, no tiene componente en la dirección de propagación.

Igualmente, usando la ley de Gauss para el campo magnético, ecuación 7.9, obtendríamos que el campo magnético ondulatorio será

$$\mathbf{B}(x,t) = B_y(x,t)\mathbf{j} + B_z(x,t)\mathbf{k}$$

Para seguir vamos a tomar el eje  $y$  en la dirección de  $\mathbf{E}$  y, como hipótesis simplificadora, supongamos que es así en cualquier instante  $\mathbf{E}(x,t) = E_y(x,t)\mathbf{j}$ ; tipo de onda que se denomina onda polarizada linealmente. Tomada esta opción debemos determinar cuál es ahora la dirección de  $\mathbf{B}$ ; Para ello aplicaremos la ley de Faraday, ecuación 7.10, tomando como camino de circulación de  $\mathbf{E}$  el rectángulo

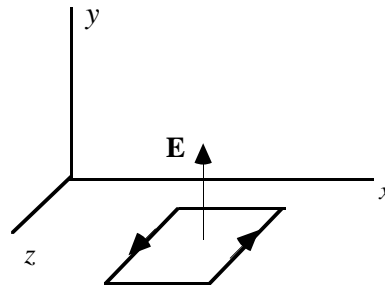


fig. 7.6

$\Delta x \Delta z$  de la figura 7.6, que tiene indicado el sentido de circulación con arreglo al avance de un tornillo según el sentido positivo del eje  $y$  (o según la regla de la mano derecha si prefiere). Como cualquier desplazamiento a lo largo de este camino es perpendicular a  $\mathbf{E}$  tenemos  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  por lo tanto según la ley de Faraday

$$\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \frac{d}{dt} \int B_y dx dz \approx \frac{d}{dt} [B_y \Delta x \Delta z] = [\Delta x \Delta z] \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

donde  $B_y$ , de fuera de la integral, es el valor en el centro del rectángulo; la aproximación será mejor cuanto más pequeño sea el rectángulo. Así pues la componente  $y$  del campo magnético ondulatorio es nula, como también lo es la  $x$ , según la ley de Gauss; el campo magnético ondulatorio es de la forma:  $\mathbf{B}(x,t) = B_z(x,t)\mathbf{k}$ , ortogonal a  $\mathbf{E}$ .

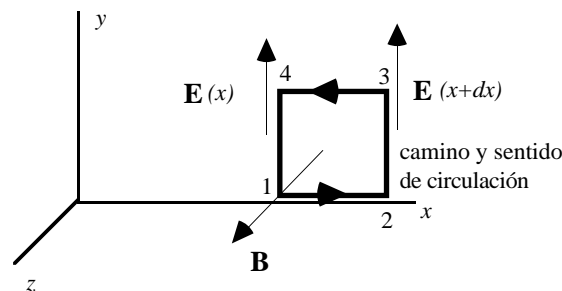


fig. 7.7

Si aplicamos la ley de Faraday, tomando como camino de circulación de  $\mathbf{E}$  el rectángulo  $\Delta x \Delta y$  de la figura 7.7 tendremos, para el primer miembro

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{12341} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{12} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{23} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{34} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{41} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

la contribución a la circulación de los tramos 12 y 34 es nula ya que en ambos  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{l}$  son perpendiculares. En el tramo 23,  $d\mathbf{l} = dy\mathbf{j}$ , y en el 41,  $d\mathbf{l} = -dy\mathbf{j}$  por lo que podemos valorar la circulación a lo largo del camino cerrado como

$$\int_{23} E_y(x + \Delta x, t) dy - \int_{41} E_y(x, t) dy = [E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)] \Delta y$$

donde las  $E_y$  se han podido sacar fuera de las integrales porque son funciones independientes de  $y$ . Si podemos considerar  $\Delta x$  pequeño, entonces

$$E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t) = \frac{E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)}{\Delta x} \Delta x \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x$$

y por lo tanto

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

El flujo del campo magnético a través de la superficie limitada por el anterior camino de circulación es  $\approx B_z \Delta x \Delta y$  donde el campo magnético sería el del centro del rectángulo. Substituyendo en la ley de Faraday, tenemos

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \Delta y \approx - \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

la aproximación es mejor cuanto más pequeño es el rectángulo; en el límite

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (7.4.bis)$$

Nos falta saber la dependencia entre la variación temporal de  $\mathbf{E}$  y la espacial de  $\mathbf{B}$ , es decir la simétrica a la ecuación 7.4. Impongamos a estos campos oscilantes la condición de satisfacer la última de las ecuaciones de Maxwell, la ley de Ampère-Maxwell que en el vacío viene dada por la ecuación 7.12. Como el proceso a seguir es análogo al que acabamos de recorrer, lo haremos esquemáticamente. La circulación de  $\mathbf{B}$  la calcularemos para el rectángulo de la figura 7.6

$$\int_{\text{todo el rectángulo}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -B_z(x + \Delta x, t) \Delta z + B_z(x, t) \Delta z = - \left( \frac{B_z(x + \Delta x, t) - B_z(x, t)}{\Delta x} \Delta x \right) \Delta z \approx - \frac{\partial B_z}{\partial x} \Delta x \Delta z$$

El flujo del campo eléctrico a través de la superficie limitada por el camino de circulación es aproximadamente  $E_y \Delta x \Delta z$  donde el campo eléctrico sería el del centro del rectángulo. Substituyendo

en la ley de Ampère-Maxwell

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} \Delta x \Delta z \approx \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \cdot \Delta x \Delta z$$

y en el límite

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (7.5.bis)$$

Las dos últimas ecuaciones numeradas son las mismas que las de igual número, sin bis, y conducen a la ecuación de onda 7.6.

#### 7.4 Energía de una onda electromagnética. Vector de Poynting

La energía transportada por una onda electromagnética está repartida entre la energía eléctrica y la magnética. Las respectivas densidades de energía son

$$\eta_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad \text{y} \quad \eta_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

que en el vacío podemos escribir

$$\eta_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{y} \quad \eta_B = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Hemos visto que para una onda plana armónica se verificaba que  $B_0 = E_0 / c$ , y teniendo en cuenta que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \text{o bien} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

obtenemos

$$\eta_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 c^2} (cB)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \eta_B$$

es decir la densidad de energía asociada a la onda eléctrica es igual a la de la onda magnética, así la densidad de la onda electromagnética puede escribirse

$$\eta = \eta_E + \eta_B = 2\eta_E = \epsilon_0 E^2 \quad (7.13)$$

La intensidad de una onda es la rapidez con que la energía atraviesa una superficie de área unidad perpendicular a la dirección de propagación y para todas las ondas armónicas es igual al producto de la densidad de energía por la velocidad de la onda

$$I = \eta c = \epsilon_0 E^2 c \quad (7.14)$$

Podemos construir un vector intensidad  $\mathbf{S}$  cuyo módulo sea la intensidad  $I$  de la onda y dirigido según la dirección de propagación de la onda. Como la dirección de propagación es la del vector  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ , siempre para ondas planas en el vacío, tendremos

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = E \mathbf{j} \wedge B \mathbf{k} = EB \mathbf{i} = \frac{E^2}{c} \mathbf{i} = \frac{S}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{i} = \mu_0 S \mathbf{i}$$

y por tanto

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (7.15)$$

El vector  $\mathbf{S}$  recibe el nombre de vector de Poynting. Las expresiones de las ecuaciones 7.14 se han dado para una onda propagándose en el vacío y nadie asegura su validez en presencia de medios materiales; tampoco la existencia de  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$  asegura un flujo de energía, basta pensar en una disposición de un condensador cargado y un imán dispuesto adecuadamente, ambos campos estáticos y por lo tanto sin propagación de energía. En ausencia de corrientes podemos escribir una ecuación de *conservación de la energía* partiendo de la interpretación de  $\mathbf{S}$ . Tomando una superficie cerrada, el flujo de  $\mathbf{S}$  a través de ella será la energía que sale (flujo positivo) de la superficie por unidad de tiempo, que debe ser igual a la disminución de energía, por unidad de tiempo, en el volumen limitado por esa superficie. Escrito en forma integral

$$\int_{\text{toda la superficie}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = - \frac{d}{dt} \int_{\text{volumen}} \eta dV$$

o en forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = - \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Si se mide la intensidad de una onda electromagnética, la duración de la medida será, generalmente, mayor que el periodo de la onda; así, desde un punto de vista práctico, tendrá más interés un valor promedio de la intensidad que su valor instantáneo. Para ondas periódicas, de periodo  $T$ , el valor promedio se calcula así

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dt \right] \mathbf{i} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \mathbf{i}$$

## 7.5 Cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas. Presión de radiación

Nuestro objetivo es determinar la cantidad de movimiento que transporta la onda electromagnética. Lo haremos calculando la cantidad de movimiento recibida por un electrón en su interacción con el campo electromagnético. Para ello consideremos la interacción entre una onda electromagnética plana y un electrón, en un instante determinado; el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  ejerce una fuerza,  $\mathbf{F}_E$ , sobre el

electrón que, por simplicidad, supondremos con una cierta velocidad,  $\mathbf{v}$ , paralela a  $\mathbf{E}$ ; el campo magnético ejerce, entonces, una fuerza  $\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ . La fuerza  $\mathbf{F}_E$  es siempre antiparalela

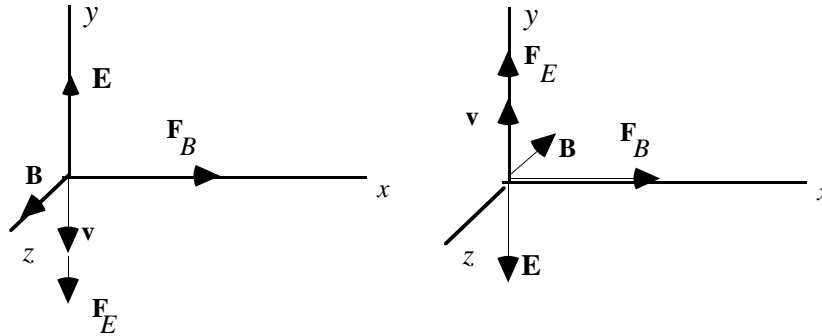


Fig. 7.8

a  $\mathbf{E}$ , mientras que  $\mathbf{F}_B$  tiene siempre la dirección y sentido de propagación de la onda ya que  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{B}$  cambian su sentido simultáneamente. En la figura 7.8 se muestran dos instantáneas que ilustran este hecho. La fuerza instantánea sobre el electrón es  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B$ , mientras que su valor promedio temporal es  $\langle \mathbf{F} \rangle = \langle \mathbf{F}_B \rangle$  ya que el valor promedio de la fuerza eléctrica es cero pues es oscilatoria. Así

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \langle \mathbf{F}_B \rangle = q \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \rangle = q \langle v B \rangle \mathbf{i} = \frac{q}{c} \langle v E \rangle \mathbf{i}$$

La potencia realizada por la onda electromagnética sobre el electrón es

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = qvE$$

y en valores promedio temporal

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = q \langle vE \rangle \quad (7.16)$$

Podemos relacionar la fuerza con la cantidad de movimiento mediante la segunda ley de Newton

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = \frac{q}{c} \langle vE \rangle \mathbf{i} \quad (7.17)$$

eliminando  $\langle vE \rangle$  entre las ecuaciones 7.16 y 7.17 tenemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \mathbf{i}$$



es decir, en un cierto intervalo de tiempo, si el electrón toma una cierta cantidad de energía de la onda, también tomará una cantidad de movimiento igual a la energía dividida por  $c$ , en la dirección de propagación. La conservación de la cantidad de movimiento nos obliga a aceptar que la onda transportaba esa cantidad de movimiento que ha sido cedida al electrón. Cuando una onda incide sobre un cuerpo transmite, por lo tanto, cantidad de movimiento al mismo. Se suele dar esta transmisión, como la velocidad de transmisión de cantidad de movimiento por unidad de área que, como equivale a una fuerza por unidad de área, se conoce como *presión de radiación*,  $p_{rad}$ . En el caso particular de incidencia normal y absorción total de la onda por el material

$$p_{rad} = \frac{1}{A} \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle \mathbf{i} = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{Adt} \right\rangle = \frac{\langle S \rangle}{c}$$

Si la onda incide normalmente y se refleja totalmente en la superficie, la cantidad de movimiento de la onda reflejada es un vector opuesto al de la onda incidente. La variación de la cantidad de movimiento es el doble que en caso de absorción total y, por lo tanto, la presión de radiación es el doble. Cualquier otro caso en el que la onda se refleje parcialmente estará entre estos dos extremos y la presión de radiación estará comprendida entre

$$\frac{\langle S \rangle}{c} < p_{rad} < 2 \frac{\langle S \rangle}{c}$$

Desde otro punto de vista se puede asociar al fenómeno electromagnético un modelo de *partícula de masa en reposo nula*, partícula cuyas propiedades, energía  $E$  y cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$ , guardan la siguiente relación con las propiedades de la onda, frecuencia  $\omega$  y vector de onda  $\mathbf{k}$

$$E = \frac{h}{2\pi} \omega \quad ,, \quad \mathbf{p} = \frac{h}{2\pi} \mathbf{k}$$

donde  $h$  es la llamada constante de Planck. Estas partículas reciben el nombre de *foton*.es y para ellas se cumple la siguiente relación entre la energía y la cantidad de movimiento

$$E = pc$$

## 7.6 Propagación de ondas electromagnéticas en un medio dieléctrico. Índice de refracción

Todos los materiales están constituidos por un enorme número de átomos y cada uno de éstos, a su vez, por un núcleo relativamente pesado y una nube electrónica en su entorno. Una onda electromagnética que incida sobre un material hará que aparezcan fuerzas de interacción con las cargas eléctricas dando origen a tres fenómenos básicos: polarización, conducción y magnetización. Cualquier material puede exhibir los tres fenómenos pero según sea el fenómeno dominante recibe el nombre de dieléctrico, conductor o material magnético, respectivamente. Para simplificar nos limitaremos a materiales que cumplan con las siguientes hipótesis:

- materiales homogéneos*, es decir que sus propiedades no varían de un lugar a otro.
- materiales lineales*, esto indica que la relación entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  y entre  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  viene dada por una constante, por ejemplo  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , donde  $\epsilon$  debe describir las propiedades de polarización del medio, o también  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , siendo  $\sigma$  la conductividad eléctrica del material.

c) *materiales isotropos*, por lo que las propiedades del material,  $\epsilon$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  no cambian con la dirección.

Con todas estas hipótesis las propiedades de un medio de propagación de ondas electromagnéticas quedan descritas mediante las constantes  $\epsilon$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ .

Nos ocuparemos, ahora, de la propagación de las ondas electromagnéticas en materiales dieléctricos, es decir materiales con ausencia de electrones libres, con magnetización despreciable. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, para el caso particular de ausencia de carga neta  $\rho = 0$ , y de corriente,  $\mathbf{j} = 0$ , ya que consideramos un dieléctrico ideal, es decir con  $\sigma = 0$ , quedan de la forma

Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ley de Faraday-Henry	$\nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Ley de Ampère-Maxwell	$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

es decir igual que en el vacío substituyendo  $\epsilon_0$  por  $\epsilon$  y  $\mu_0$  por  $\mu$ . Una onda plana electromagnética será compatible con la ecuaciones de Maxwell y su velocidad de fase en el medio será

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

El cociente entre las velocidades de una onda electromagnética en el vacío y en el dieléctrico se denomina índice de refracción absoluto,  $n$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \quad (7.18)$$

Como para los materiales no ferromagnéticos  $\mu_r$  no se desvía de la unidad en más de unas pocas partes en  $10^4$ , podemos tomar  $\mu_r \approx 1$  y así

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (7.19)$$

La dependencia de  $\epsilon_r$ , y por lo tanto de  $n$ , con la frecuencia de la onda, puede estudiarse mediante un sencillo modelo que resulta conceptualmente útil; un modelo más realista precisa de la física cuántica. Podemos considerar un modelo atómico como el del ejemplo 1.7. Cuando el centro de la carga electrónica se desplaza  $x$ , con respecto al núcleo, aparece una fuerza elástica  $-m\omega_0^2x$  que tiende a restaurarlo a la posición de equilibrio; podemos pues considerar el átomo como un oscilador de frecuencia propia  $\omega_0$ . Si el desplazamiento  $x$  se produce por un campo estático, el átomo tiene un momento dipolar inducido

$$\mathbf{p} = \frac{q^2}{m\omega_0^2} \mathbf{E}$$

como  $\mathbf{p} = \alpha\epsilon_0 \mathbf{E}$  la polarizabilidad atómica sería

$$\alpha = \frac{q^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

y la susceptibilidad eléctrica del material podríamos aproximarla por  $\chi = n \alpha$ , siendo  $n$  el número de átomos por unidad de volumen. La constante dieléctrica o permitividad relativa del material sería entonces

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{nq^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

Si el campo eléctrico es el de una onda electromagnética armónica, podemos considerar el átomo como un oscilador forzado por una fuerza  $F = qE_0 \cos \omega t$ , y en el que no consideramos pérdidas de energía,  $\tau = \infty$ . La respuesta será

$$x(t) = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0 \cos \omega t$$

Si  $\omega < \omega_0$ , el desplazamiento y la fuerza aplicada están en fase y si  $\omega > \omega_0$ , están en contrafase. Ahora

$$\chi = \frac{nq^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

y

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{nq^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} = n^2(\omega) \quad (7.20)$$

que nos da la dependencia, con la frecuencia, del índice de refracción, según el modelo empleado. La velocidad de fase  $v = c/n$  de la onda electromagnética también dependerá, por lo tanto, de la frecuencia. La respuesta dieléctrica con la frecuencia varía enormemente a lo largo del espectro electromagnético y no queda explicada con el simple modelo anterior y no sólo por sus evidentes limitaciones sino también porque la polarización atómica inducida por el campo aplicado no es el único mecanismo de polarización.

## 7.7 Ondas electromagnéticas en un medio conductor

Los efectos vistos en los dieléctricos también están presentes en los conductores pero suelen ser despreciables frente a los debidos a la interacción con los electrones libres. Consideremos el conductor como un medio continuo en el que no existe carga neta pero en el que hay cargas libres, es decir que pueden moverse en el interior del material. Supongamos, también, que la densidad de corriente  $\mathbf{j}$  guarda una relación lineal con el campo aplicado,  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  (ley de Ohm). Las tres primeras ecuaciones de Maxwell, en forma diferencial, serán las mismas que en un medio dieléctrico, cambiando la última que ahora será

Ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \left( \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Tomando rotacional en la ley de Faraday

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{B})$$

$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = - \nabla^2 \mathbf{E}$ , ya que por la ley de Gauss del campo eléctrico en ausencia de carga neta  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ; en el segundo miembro podemos substituir  $\nabla \wedge \mathbf{B}$  por su equivalente dado por la ley de Ampère-Maxwell, tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

y como por la ley de Ohm

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

substituyendo

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (7.21)$$

La ecuación 7.21 presenta un término añadido a la ecuación diferencial de onda ordinaria: el de la primera derivada temporal de  $\mathbf{E}$ ; observemos que es de la forma correspondiente a la fuerza viscosa amortiguadora en el oscilador. Un cambio de  $\mathbf{E}$  con el tiempo genera una fuerza electromotriz que en un medio conductor,  $\sigma \neq 0$ , hace que circulen corrientes que convierten energía de la onda eléctrica en calor.

Supongamos una solución de la ecuación 7.21 del tipo de una onda plana polarizada linealmente, propagándose según  $+x$  que podemos escribir en forma compleja como

$$E_y = E_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

como

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = j\omega E_y \quad , \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_y \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2 E_y$$

deberá cumplirse

$$-k^2 E_y = -\omega^2 \mu \epsilon E_y + j\omega \mu \sigma E_y$$

para lo que es preciso que

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma = \omega \mu (\omega \epsilon - j\sigma) \quad (7.22)$$

resulta un número de onda complejo, que podemos escribir así

$$k = k_R - jk_I \quad (7.23)$$

y la ecuación de onda en forma compleja

$$E_y = E_0 e^{j(\omega t - k_R x)} e^{-k_I x}$$

tomando la parte real

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - k_R x) e^{-k_I x}$$

que tiene una forma similar a la ecuación de onda en el vacío; la diferencia está en el factor  $e^{-k_I x}$ , lo que supone que la amplitud de la onda decrece cuando ésta se propaga según  $x$ . Para poder valorar el número de onda  $k$ , comparemos la densidad de corriente de conducción y la de desplazamiento

$$\frac{J}{\partial D / \partial t} = \frac{\sigma E_y}{\partial(\epsilon E_y) / \partial t} = \frac{\sigma E_y}{j\omega\epsilon E_y} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} = -j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

En un *conductor* la corriente de conducción es dominante respecto a la de desplazamiento  $J \gg \partial D / \partial t$ , por lo que  $\sigma \gg \omega\epsilon$ , y la  $k^2$  de la ecuación 7.22 puede tomarse como imaginaria

$$k^2 \approx -j \omega\mu\sigma$$

de donde  $k = \pm \sqrt{-j \omega\mu\sigma}$ ; recordando que  $\sqrt{-j} = \frac{-j+1}{\sqrt{2}}$ , tenemos  $k = \pm \sqrt{\omega\mu\sigma} \frac{-j+1}{\sqrt{2}}$ ; como

hemos tomado una onda que progresa en el sentido positivo de las  $x$ , el número de onda complejo será

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} (1 - j) \quad (7.24)$$

así, la onda progresará según  $x$  a una velocidad de fase

$$v = \frac{\omega}{k_R} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

con una amplitud que irá disminuyendo exponencialmente a medida que penetra en el conductor según un factor

$$e^{-\sqrt{\omega\mu\sigma/2} x} \quad (7.25)$$

Recorrida una distancia  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ , la amplitud se habrá reducido en  $e^{-1}$ ;  $\delta$  es conocida como *profundidad de penetración* de la onda electromagnética en un conductor. En el caso extremo de que el conductor fuera perfecto  $\sigma \rightarrow \infty$  y de aquí  $\delta = 0$ , lo que significa que las ondas planas no pueden penetrar en un medio superconductor.

En la tabla 7.1 se muestran valores de  $\delta$  para el cobre a diversas frecuencias; figura también la longitud de onda en el vacío, para que sirva de referencia, y la velocidad de fase  $v = \omega/k_R = \omega\delta$

Tabla 7.1

$f/\text{Hz}$	$\delta/\text{m}$	$\lambda/\text{m}$	$v/\text{ms}^{-1}$
50	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^6$	2,9
$10^6$	$6,6 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^2$	$4,1 \cdot 10^2$
$10^9$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^4$
$10^{13}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^6$
$10^{15}$	$2,1 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^7$

Observamos que a altas frecuencias el campo eléctrico queda confinado prácticamente en la superficie, la corriente sólo podrá fluir por ella y por lo tanto la resistencia del conductor aumenta con la frecuencia; comprobamos el efecto de apantallamiento que un conductor ejerce para las ondas electromagnéticas. Desde un punto de vista energético podemos interpretar que al incidir una onda sobre un conductor muy *pocos* electrones *ven* la onda transmitida, la absorción de energía puede ser intensa individualmente pero, en conjunto, disipan poca energía; la mayor parte de la onda es reflejada.

Este modelo, considera el metal como un medio continuo, funciona bien hasta el infrarrojo, pero a medida que aumenta la frecuencia hay que considerar la estructura de la materia. Aún sin abandonar el modelo hay que tener en cuenta que al aumentar la frecuencia, llegará un momento en que la corriente de conducción y la de desplazamiento serán del mismo orden o sea  $\sigma \approx \omega\epsilon$ , con lo que la aproximación hecha para el cálculo del número de onda  $k$  no podrá utilizarse. Cuando  $J \ll \partial D/\partial t$ , con lo que  $\sigma \ll \omega\epsilon$ , el material habrá pasado de ser conductor a ser aislante, por ejemplo la plata tiene una conductividad  $\sigma = 6,17 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$ , con lo que

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \approx \frac{10^{18}}{f}$$

de una forma un tanto arbitraria podemos decir que hasta  $f = 10^{16} \text{ Hz}$ , en la zona del ultravioleta, la plata es conductora y a partir de  $f = 10^{20} \text{ Hz}$ , zona de rayos X duros, se comporta como un dieléctrico por lo que las ondas penetrarán muchas longitudes de onda en su interior.

### Ejemplo 7.2

Una antena emite ondas electromagnéticas de 40 kHz, que se propagan en agua de mar y que supondremos ondas planas. Tomando, para el agua de mar,  $\epsilon_r = 81$ ,  $\mu_r = 1,0$  y  $\sigma = 4,0 \text{ Sm}^{-1}$ :

- Calcular la longitud de la antena si debe ser igual a media longitud de onda.
- ¿Podría, esta antena, ser el fundamento de un sistema de comunicación submarina?

### Solución

a) A la frecuencia 40 kHz, la relación entre la corriente de conducción y la de desplazamiento en el agua de mar es

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{4,0}{2\pi \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 2,2 \cdot 10^4 \gg 1$$

es decir, la corriente de conducción predomina sobre la de desplazamiento por lo que el agua de mar se comporta, a 40 kHz, como un medio conductor. Podemos así tomar el valor de  $k_R$  de la ecuación 7.24

$$k_R = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma} = 0,79 \text{ m}^{-1}$$

y de aquí

$$\text{longitud de la antena} = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{k_R} = 3,9 \text{ m}$$

b) Al tratarse de un medio conductor la amplitud del campo eléctrico disminuye con la distancia según la ecuación 7.25

$$E(x) = E(0) e^{-\sqrt{\omega\mu\sigma/2} x} = E(0) e^{-0,79 x}$$

así, por ejemplo, la amplitud queda reducida a un 1% en una distancia recorrida  $x^*$ , que vale

$$x^* = \frac{\ln 0,01}{-0,79} = 5,8 \text{ m}$$

evidentemente la atenuación es excesiva y éste no sería un buen sistema de comunicación subacuática.

---

## 8 Ondas estacionarias

### 8.1 Ondas estacionarias unidimensionales

Estudiaremos la propagación de ondas propagándose en un medio finito, que dará lugar a reflexiones en sus límites. Recordemos que la ecuación diferencial de onda unidimensional vista es de la forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

que tiene como solución general cualquier función del tipo

$$\Psi = Af_1(x - vt) + Bf_2(x + vt)$$

Veamos que ésta no es una forma conveniente para el caso que queremos estudiar. Empezaremos viendo dos casos de superposición de dos ondas armónicas que viajan en sentidos diferentes en el mismo medio. Por simplicidad supondremos que ambas tienen la misma amplitud,  $A$ :

a)

$$A e^{j(\omega t - kx)} + A e^{j(\omega t + kx)} = A e^{j\omega t} (e^{-jkx} + e^{jkx}) = 2A \cos kx e^{j\omega t}$$

la función de la onda resultante será

$$\Psi = \Re[2A \cos kx e^{j\omega t}] = 2A \cos kx \cos \omega t$$

b) consideremos ahora que la onda que viaja en el sentido negativo, lo hace con inversión de fase

$$A e^{j(\omega t - kx)} + A e^{j(\omega t + kx)} e^{j\pi} = A e^{j\omega t} (e^{-jkx} - e^{jkx}) = -j 2A \operatorname{sen} kx e^{j\omega t}$$

la onda resultante será

$$\Psi = \Re[-j 2A \operatorname{sen} kx e^{j\omega t}] = 2A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t$$

en ambos casos vemos que la solución general queda escrita como producto de una función de  $x$  por una función de  $t$ :

$$\Psi = f(x) g(t)$$



estudieemos qué funciones de este tipo son solución de la ecuación diferencial de onda. Sustituyendo en ella

$$f \frac{d^2g}{dt^2} = v^2 g \frac{d^2f}{dx^2}$$

dividiendo ambos miembros por  $fg$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2g}{dt^2} = v^2 \frac{1}{f} \frac{d^2f}{dx^2}$$

los dos miembros de esta ecuación son funciones respectivamente de  $t$  y  $x$  solamente. Para que la igualdad pueda ser satisfecha para todos los valores de  $t$  y  $x$  es necesario que cada miembro sea constante, llamando a ésta  $-\omega^2$  tenemos las dos ecuaciones siguientes

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -\omega^2 g \quad , \quad \frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f$$

cada una de las cuales tiene soluciones armónicas. En particular, podemos tomar

$$f = C_1 \cos \frac{\omega}{v} x \quad \text{y} \quad g = C_2 \cos \omega t$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes. De aquí, haciendo  $C_1 C_2 = 2A$ , podemos escribir

$$\Psi = f(x)g(t) = 2A \cos \frac{\omega}{v} x \cos \omega t = 2A \cos kx \cos \omega t \quad (8.1)$$

Esta solución corresponde, como hemos visto previamente, a la superposición de dos ondas idénticas excepto en su sentido de propagación. Observemos que esta función se anula para  $x = \pm \lambda/4$  en cualquier valor de  $t$ ; estos nulos se repiten espacialmente a intervalos de  $\lambda/2$ . Estos puntos de perturbación nula reciben el nombre de *nodos*. Cada uno de los otros puntos oscila a la misma frecuencia pero su amplitud depende de la posición según  $2A \cos kx$ . Este modo de vibración es totalmente distinto al de una onda progresiva ya que los puntos tienen amplitudes distintas, pero constantes con el tiempo, y *vibran en fase*. Al no haber propagación de la perturbación estas ondas se denominan *ondas estacionarias*.

## 8.2 Ondas en medios limitados

El hecho de que en las ondas estacionarias existan nodos puede usarse para construir soluciones adecuadas a ondas en medios limitados, que es nuestro objetivo. Si consideramos una cuerda de longitud  $a$ , fijada por sus extremos

$$\Psi(0,t) = 0 \quad \text{y} \quad \Psi(a,t) = 0$$

La onda estacionaria que hemos considerado no se anula en  $x = 0$  pero si lo hace

$$\Psi = A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t$$

como  $\Psi$  debe anularse en  $x = a$  debe cumplirse  $\text{sen}ka = 0$  por lo que el número de onda  $k$ , que hasta ahora podía tener cualquier valor, queda restringido al conjunto discreto de valores,  $k = n\pi/a$ , donde  $n$  es un número entero. Según esto

$$\lambda = \frac{2a}{n}$$

Esta condición es la misma en el caso de un tubo de gas cerrado por sus dos extremos en los que debe haber un nodo de desplazamiento (al que corresponde un antinodo o vientre de presión).

En el caso de una cuerda con un extremo fijo y el otro libre, o de un tubo cerrado en un extremo y abierto por el otro, es preciso que exista un nodo en un extremo y un vientre en el otro. Las nuevas condiciones geométricas imponen

$$\lambda = \frac{4a}{(2n + 1)}$$

La frecuencia menor corresponde a  $n=1$ , que para el caso de extremos fijos sería  $\omega_1 = \pi v/a$  y recibe el nombre de frecuencia fundamental. Los otros modos forman una sucesión de ondas de frecuencias crecientes, múltiplos de la fundamental, y se denominan armónicos  $\omega_n = n\omega_1$ . Para este caso, y para el modo  $n$ , la ecuación de onda sería

$$\Psi_n = A \text{sen} \frac{n\pi v x}{a} \text{sen} \frac{n\pi v t}{a}$$

Todos los sistemas acotados, no necesariamente unidimensionales, que satisfagan la ecuación diferencial de ondas tendrán modos normales. Sin embargo, no es generalizable la característica,  $\omega_n = n\omega_1$ , vista para nuestro caso particular.

### 8.3 Energía en la ondas estacionarias

Para los modos normales en la cuerda es fácil ver que las energías cinética y potencial, por longitud de onda, valen

$$E_{k\lambda} = \frac{1}{4} v^2 \mu \frac{(n\pi A)^2}{a} \cos^2 \frac{n\pi v t}{a}$$

$$U_\lambda = \frac{1}{4} v^2 \mu \frac{(n\pi A)^2}{a} \text{sen}^2 \frac{n\pi v t}{a}$$

La suma de  $E_{k\lambda}$  y  $U_\lambda$  es constante y la energía total oscila entre ambas dos veces por ciclo.

#### Ejemplo 8.1

Sobre una cuerda de densidad  $\mu = 0,25 \text{ kg/m}$  se excitan ondas armónicas de amplitud  $A = 3,0 \text{ mm}$ , a la frecuencia de  $10 \text{ Hz}$ . Las ondas viajan a la velocidad de  $5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

a) Calcular la longitud de onda  $\lambda$  y el número de onda  $k$ .

b) Demostrar que la energía media que hay en cada metro de la cuerda viene dada por la expresión

$$\eta = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \mu$$

c) Calcular la potencia media suministrada por el excitador a la cuerda

La cuerda se fija a una distancia  $L = 0,75$  m del excitador y se origina una onda estacionaria de amplitud 10 mm, con un nodo en el punto de excitación,

d) ¿Cuántos nodos tiene la onda estacionaria así formada?

e) Calcular la energía total almacenada en la cuerda por la onda estacionaria.

### Solución

a) Para un instante determinado, la forma de la onda periódica se repite en el espacio cada longitud  $\lambda$ , de tal forma que

$$\Phi(x) = \Phi(x + \lambda); \text{ donde } \lambda = v / f = 0,50 \text{ m.}$$

El número de onda  $k$  es el número de oscilaciones que hay en cada unidad de longitud, multiplicado por  $2\pi$

$$k = 2\pi / \lambda = 4\pi = 13 \text{ m}^{-1}$$

b) Todo elemento de cuerda realiza un MAS de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $A$ ; la energía que tiene será:

$$dE = \frac{1}{2} dm \cdot \omega^2 A^2$$

como  $dm = \mu dl$

$$\eta = \frac{dE}{dl} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2$$

c) La potencia media es igual a la energía media que atraviesa una sección de la cuerda cada segundo, que a su vez es igual a la energía almacenada en una oscilación de cuerda, dividida por el período de oscilación.

$$P = \frac{\Delta E}{T} = \frac{\eta \lambda}{T} = \frac{\eta v T}{T} = \eta v = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v =$$

$$= \frac{1}{2} \mu \cdot (2\pi f)^2 A^2 v = 2\pi^2 \cdot 10^2 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,25 \cdot 5 = 0,022 \text{ W}$$

d) La condición de onda estacionaria para una cuerda fija en ambos extremos es

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

donde  $n$  es el número de semiondas. Sustituyendo los valores de  $L$  y  $\lambda$ , se obtiene,  $n = 3$  semiondas. Habrá tres semiondas, luego habrá cuatro nodos, incluyendo los extremos de la cuerda.

e) Como una onda estacionaria podemos considerarla formada por la superposición de dos ondas de igual amplitud e igual frecuencia propagándose en sentidos opuestos, la amplitud de cada onda componente es la mitad de la amplitud de la onda resultante. Así cada una de las ondas componentes tendrá una energía almacenada:

$$E = \eta L = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \left(\frac{A_e}{2}\right)^2 L = \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot (2\pi \cdot 10)^2 \cdot (10^{-2} / 2)^2 = 1,25 \text{ J}$$

y la energía total será:  $E_T = 2E = 2,5 \text{ J}$

**Ejercicio 8.1**

La función de onda correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija en ambos extremos es  $y(x,t)=0,50\text{sen}0,025x\text{cos}500t$  estando  $y$  y  $x$  en cm y  $t$  en segundos.

- Hallar la velocidad y la amplitud de las ondas progresivas cuya superposición da como resultado la onda estacionaria. ¿Cuál es la distancia entre nodos sucesivos en la cuerda?. ¿Cuál es la longitud más corta posible de la cuerda?
- Si la cuerda tiene 2,510 m de largo, hacer un esquema de la posición de la cuerda para  $t = 0$ ,  $t = T/4$ ,  $t = T/2$ ,  $t = 3T/4$ , en donde  $T$  es el periodo de la vibración.
- Hallar  $T$  en segundos
- Cuando la cuerda es horizontal, ¿qué le ha ocurrido a la energía de la onda?

**R :**

- a)  $200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ; 0,25 cm ; 1,26 m ; 1,26 m ; c)  $0,0126 \text{ s}$

**Ejercicio 8.2**

En una cuerda, fija en sus extremos, de 120 cm de longitud y de 2,4 gramos de masa se ha producido una onda estacionaria. Se observa la presencia de tres vientres o antinodos y que cada 10 milisegundos se anula todo desplazamiento; se mide, también, el desplazamiento máximo de dichos antinodos y resulta ser de 20mm.

- Indicar los valores de la longitud de onda y del periodo y escribir la función de onda de la onda estacionaria. En una onda estacionaria la energía está almacenada en el medio y no se propaga.
- Escribir la energía cinética de un elemento,  $dx$ , de cuerda.
- Calcular, por integración, la máxima energía cinética para la longitud de cuerda dada.
- Comprobar que la energía promedio por unidad de longitud es el doble de la de una de las ondas que se superponen para formar la estacionaria.

**R :**

- a) 80 cm ; 20 ms ;  $0,02\cdot\text{sen}7,85x\text{cos}314t$  ; c) 0,024 J

**Ejercicio 8.3**

Se dispone de una cuerda fija por ambos extremos de longitud  $L=1,0 \text{ m}$ , masa  $M=10 \text{ g}$ . y sometida a una tensión  $T=100 \text{ N}$ . Se produce una onda estacionaria de amplitud  $A_0=1,0 \text{ mm}$  y de cuatro antinodos aplicando un vibrador mecánico de frecuencia  $\omega$  en un nodo (la amplitud de vibración del nodo es mucho más pequeña que  $A_0$ ).

- Calcular la velocidad  $v$  de las ondas viajeras sobre dicha cuerda, así como la frecuencia propia  $\omega_4$  de este modo.
  - ¿Cuál es la amplitud  $A_1$  de cada una de las ondas viajeras?
  - Calcular la energía total  $E_0$  de la onda estacionaria. Manteniendo fijo el punto de aplicación del vibrador sobre la cuerda, ¿qué otras frecuencias se pueden estimular variando la  $\omega$  del vibrador?
- En un instante dado,  $t=0$ , se deja de aplicar el vibrador y se encuentra que el movimiento transversal de un antinodo es una oscilación amortiguada de frecuencia  $\omega_4$  y amplitud  $A(t) = A_0 e^{-t/4}$ .
- Calcular el factor de calidad  $Q_4$ , y dar la expresión de la energía  $E(t)$  almacenada en la cuerda en función del tiempo.

**R :**

- a)  $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ;  $1,3\cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  ; b) 0,5 mm ; c)  $4\cdot 10^{-3} \text{ J}$  ; d)  $2,5\cdot 10^3$

**Ejercicio 8.4** .....

Un tipo de láser consiste en una región del espacio limitada por unos espejos  $A$  y  $B$  separados 10cm, entre los cuales se producen unas ondas electromagnéticas estacionarias de forma que en los espejos deben producirse nodos del campo eléctrico. Si el campo eléctrico de la onda que viaja hacia la derecha es de la forma  $E=E_y \cos(kx - \omega t)$ :

- a) ¿Cuál es la expresión de la onda estacionaria producida por la superposición de esta onda y la que viaja hacia la izquierda, si toma  $x=0$  en el centro de la separación de los espejos?  
 b) ¿Cuáles son los posibles valores de  $k$  de la onda estacionaria y cuántos valores de  $k$  permiten que la onda electromagnética sea visible, es decir, que tenga longitud de onda  $3900\text{Å} < \lambda < 7600\text{Å}$ ?

**R:**

a)  $2E_y \cos k_n x \cos \omega t$ ,      b)  $k_n = (2n+1)5\pi, n=0, 1, 2, \dots; \quad 25 \cdot 10^3$

**Ejercicio 8.5** .....

Se dispone de una cuerda fija por ambos extremos de longitud  $L=1,0$  m, masa  $M=10$  g. y sometida a una tensión  $T=100$  N. Se produce una onda estacionaria de amplitud  $A_0=1,0$  mm y de cuatro antinodos aplicando un vibrador mecánico de frecuencia  $\omega$  en un nodo (la amplitud de vibración del nodo es mucho más pequeña que  $A_0$ ).

- a) Calcular la velocidad  $v$  de las ondas viajeras sobre dicha cuerda, así como la frecuencia propia  $\omega_4$  de este modo.  
 b) ¿Cuál es la amplitud  $A_1$  de cada una de las ondas viajeras?  
 c) Calcular la energía total  $E_0$  de la onda estacionaria. Manteniendo fijo el punto de aplicación del vibrador sobre la cuerda, ¿qué otras frecuencias se pueden estimular variando la  $\omega$  del vibrador?  
 En un instante dado,  $t=0$ , se deja de aplicar el vibrador y se encuentra que el movimiento transversal de un antinodo es una oscilación amortiguada de frecuencia  $\omega_4$  y amplitud  $A(t) = A_0 e^{-t/4}$ .  
 d) Calcular el factor de calidad  $Q_4$ , y dar la expresión de la energía  $E(t)$  almacenada en la cuerda en función del tiempo.

**R :**

a)  $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ;  $1,3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  ; b)  $0,5 \text{ mm}$  ; c)  $4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$  ; d)  $2,5 \cdot 10^3$

**Ejercicio 8.6** .....

Un medio sólido de densidad  $\rho_s=4500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  y módulo elástico  $K_s=3,0 \cdot 10^{10} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ , está limitado por dos superficies planas y paralelas, prácticamente infinitas separadas una distancia  $d = 5,0$ cm. En el exterior hay un gas de densidad  $\rho_g=1,3 \text{ Kg}\cdot\text{m}^{-3}$  y módulo elástico  $K_g=1,0 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ . En la figura 8.1 se representa un esquema de la onda acústica de presión. Se pide :

- a) Determinar las velocidades de propagación de las ondas en el sólido,  $v_s$ , y en el gas,  $v_g$ .  
 b) Determinar la relación de impedancias entre los dos medios  $Z_g/Z_s$ .  
 c) Determinar la fracción de intensidad transmitida por una onda que proviene del sólido y se refleja en la superficie.  
 d) Suponiendo que la reflexión fuese total, encontrar la frecuencia de oscilación del modo fundamental para la onda estacionaria formada entre ambas superficies.  
 e) Si la amplitud máxima del modo fundamental es  $A=1,0 \cdot 10^{-7}$  m, encontrar la densidad de energía y la intensidad de cada una de las dos ondas viajeras que forman la onda estacionaria.

f) Teniendo en cuenta que la reflexión no es total y considerando este hecho como única causa de disipación de energía, calcular la intensidad total disipada y el factor de calidad de este oscilador.

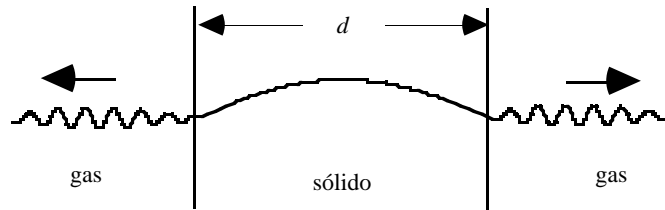


Fig. 8.1

**R :**

- a)  $v_s=2,6 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$  ;  $v_g=2,8 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-1}$  ; b)  $Z_g/Z_s=3,1 \cdot 10^{-5}$  ;  
 c)  $I_t/I_i=1,2 \cdot 10^{-4}$  ; d)  $f_0=26 \text{ kHz}$  ; e)  $\eta=0,15 \text{ Jm}^{-3}$  ;  $I=3,8 \cdot 10^2 \text{ Wm}^{-2}$  ;  
 f)  $P=0,094 \text{ Wm}^{-2}$  ;  $Q=2,5 \cdot 10^4$
- .....

## 9 Superposición de ondas. Paquetes de ondas

### 9.1 Introducción

Al inicio del estudio del modelo ondulatorio lineal, hemos visto la posibilidad de superponer funciones de onda, soluciones de la ecuación diferencial, que daría, como consecuencia, una función también de onda. Hemos tratado fundamentalmente ondas planas armónicas, ya que corresponden al modelo matemático de onda más sencillo; nos ha servido para ir estudiando propiedades fundamentales de las ondas, pero su aplicación sería escasa. Una onda estrictamente armónica no puede *informarnos* de nada; cualquier *mensaje* presenta formas más complejas. A continuación veremos como la superposición de ondas de distintas frecuencias permiten configurar *paquetes* de ondas.

### 9.2 Superposición de dos ondas armónicas que difieren en fase

#### 9.2.1 Caso en que las dos ondas tengan la misma amplitud, $A_1 = A_2 = A$

Llamando  $\phi = kx - \omega t$ , debemos calcular

$$\Psi = \Re \{ A e^{j\phi} + A e^{j(\phi+\Delta\phi)} \}$$

realizando la suma

$$\begin{aligned} A e^{j\phi} + A e^{j(\phi+\Delta\phi)} &= A e^{j\phi} [ 1 + e^{j\Delta\phi} ] = A e^{j\phi} [ 1 + e^{j\Delta\phi} ] [ e^{j\Delta\phi/2} e^{-j\Delta\phi/2} ] = \\ &= A e^{j\phi} e^{j\Delta\phi/2} [ e^{j\Delta\phi/2} + e^{-j\Delta\phi/2} ] = A e^{j(\phi + \Delta\phi/2)} 2\cos \Delta\phi/2 \end{aligned}$$

de donde, tomando la parte real

$$\Psi = 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2} \cos \left( \phi + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad (9.1)$$

### 9.2.2 Caso en que las dos ondas tengan distinta amplitud, $A \neq B$

Como en el caso anterior, debemos calcular

$$\Psi = \Re\{ A e^{j\phi} + B e^{j(\phi+\Delta\phi)} \}$$

realizando la suma

$$A e^{j\phi} + B e^{j(\phi+\Delta\phi)} = [A + B e^{j\Delta\phi}] e^{j\phi} = C e^{j\alpha} e^{j\phi}$$

donde

$$A + B e^{j\Delta\phi} \equiv C e^{j\alpha}$$

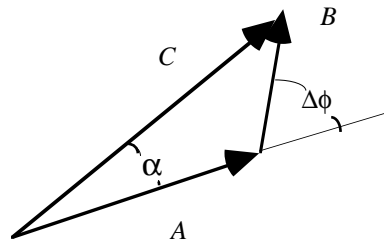


Fig. 9.1

La figura 9.1 nos puede ayudar a visualizar el cálculo de  $C$  y  $\alpha$

$$A + B \cos \Delta\phi = C \cos \alpha$$

$$B \sin \Delta\phi = C \sin \alpha$$

de donde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B \sin \Delta\phi}{A + B \cos \Delta\phi} \quad \text{,,} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \Delta\phi} \quad (9.2)$$

así

$$\Psi = \Re\{ C e^{j\alpha} e^{j\phi} \} = \Re\{ C e^{j(\phi+\alpha)} \} = C \cos(\phi + \alpha) \quad (9.3)$$

### 9.2.3 Caso particular: superposición de dos ondas armónicas con distinta frecuencia

Superpondremos dos ondas de frecuencias diferentes pero de igual amplitud y que se mueven en la misma dirección. Supondremos que ambas están en fase en  $x = 0$  y  $t = 0$ . La fase de una onda es

$$\phi_1 = k_1 x - \omega_1 t$$



y la de la segunda

$$\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi = (k_1 + \Delta k)x - (\omega_1 + \Delta\omega)t$$

introducimos la frecuencia promedio

$$\omega_p = \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2} = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

de forma análoga podríamos introducir el número de onda promedio  $k_p$ . En la figura 9.2 la altura de los segmentos es proporcional a la amplitud de la onda, su posición corresponde a la frecuencia de la onda; puede utilizarse, si se prefiere, un diagrama de amplitudes y número de onda.

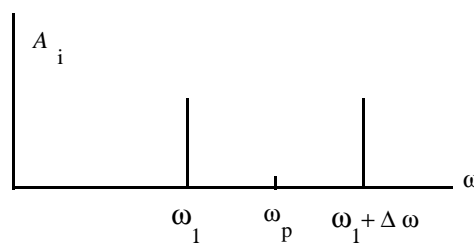


Fig. 9.2

La aplicación de la expresión general de la superposición dará

$$\Psi = 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2} \cos \left( \phi + \frac{\Delta\phi}{2} \right) = 2A \cos \left( \frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos(k_p x - \omega_p t) \quad (9.4)$$

Considerando la función

$$A(x,t) = 2A \cos \left( \frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \quad (9.5)$$

podemos decir que  $A(x,t)$  es la envuelta de  $\cos(k_p x - \omega_p t)$  o que modula a la misma.

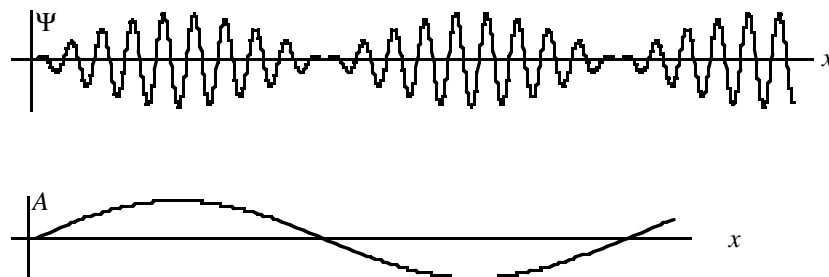


Fig. 9.3

La gráfica superior de la figura 9.3 muestra una instantánea de la superposición de dos ondas armónicas de longitud de onda casi iguales. Cada  $\Delta x = 2\pi/\Delta k = \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_2 - \lambda_1)$  las ondas están en fase y se suman constructivamente; a iguales intervalos las ondas están desfasadas  $\pi$  radianes y su suma es nula. Cuanto mayor sea la diferencia de longitudes de onda menor será la distancia  $\Delta x$  para la que pasan de estar en fase a estar en contrafase.

La gráfica inferior de la figura 9.3 muestra la misma instantánea de la envuelta  $A(x,t)$ . Simplemente con un cambio de escala las gráficas de la figura 9.3 podrían representar la dependencia temporal para un observador fijo en un punto.

En el caso en que  $\Delta\omega \ll \omega_1$ ,  $\Delta k \ll k_1$ , podemos considerar  $\omega_p \approx \omega_1$ , y  $k_p \approx k_1$ . En este caso el resultado de la superposición es una onda de la misma frecuencia y longitud de onda, aproximadamente, de las originales, llamada onda portadora, con una amplitud,  $2A$ , *modulada* por el factor

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

La función  $A(x,t)$  ha resultado ser una función sinusoidal, pero podemos obtener funciones distintas superponiendo un número mayor de ondas. Lo haremos, ahora, de tal forma que siempre la diferencia de frecuencias entre dos consecutivas sea fija. Si partimos de las dos ondas anteriores, con una diferencia de frecuencias  $\delta\omega = \Delta\omega$ , figura 9.4.a, y queremos superponer una tercera, podemos hacerlo de dos formas: con una frecuencia  $\omega_3 = \omega_2 + \Delta\omega$ , o con una frecuencia  $\omega_3 = \omega_p$ . En el primer caso mantenemos fijo  $\delta\omega$  y aumentamos el *ancho* de frecuencias empleadas  $\Delta'\omega = 2\Delta\omega$ . En el segundo caso mantenemos el ancho  $\Delta\omega$ , y reducimos el escalón de frecuencias  $\delta''\omega = \delta\omega/2 = \Delta\omega/2$ . El resultado se muestra en las figuras 9.4.b y 9.4.c, respectivamente.

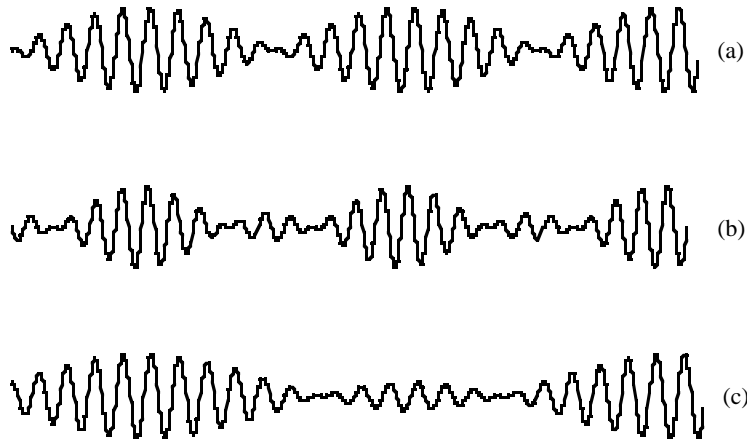


Fig. 9.4

Para ilustrar mejor lo que sucede repetimos el proceso pasando de la suma de tres ondas a la de cinco según los mismos criterios anteriores. Para el primero, mantenemos fijo  $\delta\omega$  y aumentamos  $\Delta''\omega = 5\Delta\omega$ . Según el segundo,  $\Delta\omega = \text{constante}$  y  $\delta'''\omega = \delta\omega/4$ . La superposición se muestra en las figuras 9.5.a y 9.5.b, respectivamente.

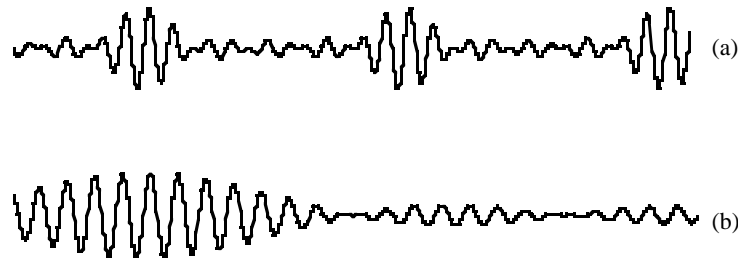


Fig. 9.5

Podemos observar que al aumentar  $\Delta\omega$ , manteniendo constante  $\delta\omega$ , las posiciones de superposición constructiva se mantienen, pero cada vez las ondas se suman, dando valores casi nulos, en posiciones más próximas a los máximos.

Al mantener constante  $\Delta\omega$  y disminuir  $\delta\omega$ , se han ido alejando las posiciones de superposición constructiva; las pulsaciones centrales se van quedando *solas*. Podemos pensar que disminuyendo grandemente  $\delta\omega$ , es decir sumando un número elevado de ondas conseguiríamos un *paquete* de ondas. En la figura 9.6 se muestra la superposición de once ondas con el mismo ancho de banda  $\Delta\omega$  de las figuras 9.4.a, 9.4.c y 9.5.b.



Fig. 9.6

En las figuras 9.4, 9.5 y 9.6 se ha ido disminuyendo la amplitud de cada onda componente de tal manera que su suma fuera siempre la misma. Si lo que se pretende es obtener un sólo paquete de ondas y prácticamente ninguna oscilación *fuera* del paquete, habría que hacer dos cosas: sumar infinitas ondas y asignar un *peso* a las amplitudes de las distintas ondas, procedimiento que sale del alcance de esta explicación.

### 9.3 Superposición de $N$ ondas armónicas que difieren en fase

Nos vamos a limitar a superponer  $N$  ondas de igual amplitud  $A$  y fases que forman una progresión aritmética de razón  $\delta\phi$ . Escribiendo la suma en forma compleja

$$\begin{aligned}\Psi &= A [e^{j\phi} + e^{j(\phi+\delta\phi)} + e^{j(\phi+2\delta\phi)} + \dots + e^{j(\phi+(N-1)\delta\phi)}] = \\ &= A e^{j\phi} [1 + e^{j\delta\phi} + e^{j2\delta\phi} + \dots + e^{j(N-1)\delta\phi}]\end{aligned}$$

debemos calcular la suma de los términos entre paréntesis, haciendo

$$\Sigma = 1 + e^{j\delta\phi} + e^{j2\delta\phi} + \dots + e^{j(N-1)\delta\phi} \quad (9.6)$$

multiplicando los dos miembros de la igualdad 9.6 por  $e^{j\delta\phi}$

$$e^{j\delta\phi} \Sigma = e^{j\delta\phi} + e^{j2\delta\phi} + \dots + e^{jN\delta\phi} \quad (9.7)$$

restando a la ecuación 9.7 la 9.6 y simplificando

$$[e^{j\delta\phi} - 1] \Sigma = e^{jN\delta\phi} - 1$$

despejando  $\Sigma$

$$\Sigma = \frac{e^{jN\delta\phi} - 1}{e^{j\delta\phi} - 1}$$

que podemos transformar de la siguiente manera

$$\Sigma = \frac{e^{jN\delta\phi} - 1}{e^{j\delta\phi} - 1} \cdot \frac{e^{jN\delta\phi/2} \cdot e^{-jN\delta\phi/2}}{e^{j\delta\phi/2} \cdot e^{-j\delta\phi/2}} = \frac{e^{jN\delta\phi/2}}{e^{j\delta\phi/2}} \cdot \frac{e^{jN\delta\phi/2} - e^{-jN\delta\phi/2}}{e^{j\delta\phi/2} - e^{-j\delta\phi/2}}$$

y como  $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \operatorname{sen} x$ , tenemos

$$\Sigma = e^{j(N-1)\delta\phi/2} \cdot \frac{\operatorname{sen} N\delta\phi/2}{\operatorname{sen} \delta\phi/2}$$

así la suma compleja de las  $N$  ondas será

$$\Psi = A e^{j(\phi + (N-1)\delta\phi/2)} \cdot \frac{\operatorname{sen} N\delta\phi/2}{\operatorname{sen} \delta\phi/2}$$

su parte real nos dará la función de onda resultante de la superposición

$$\Re[\Psi] = A \frac{\operatorname{sen} N\delta\phi/2}{\operatorname{sen} \delta\phi/2} \cos \left( \phi + (N-1) \frac{\delta\phi}{2} \right) \quad (9.8)$$

Dejamos al lector que compruebe como al hacer  $N = 2$  en la ecuación 9.8 se obtiene la ecuación 9.1 y tomemos el caso  $N = 4$ ; la suma de los cuatro complejos da otro de módulo y argumento:

$$\text{módulo} = A \left| \frac{\operatorname{sen}(4 \cdot \delta\phi/2)}{\operatorname{sen}(\delta\phi/2)} \right| \quad ,, \quad \text{argumento} = \frac{\Delta\phi}{2} = 3 \frac{\delta\phi}{2}$$

Supongamos que podemos variar  $\delta\phi$ ; si inicialmente las cuatro ondas están en fase  $\delta\phi = 0$ , y el módulo de la suma es  $4A$ ., figura 9.7.a. Al ir aumentando  $\delta\phi$ , como el argumento del numerador está multiplicado por el número de sumandos varía cuatro veces más rápido, alcanzando su primer nulo cuando  $4(\delta\phi_1/2) = \pi$ ; como el denominador es distinto de cero, el módulo será nulo. Esta situación corresponde a una diferencia de fase *parcial*,  $\delta\phi = \pi/2$  figura 9.7.b; el segundo nulo del módulo se alcanzará con el segundo del numerador, cuando  $4(\delta\phi_2/2) = 2\pi$ ; corresponde a  $\delta\phi = \pi$  figura 9.7.c. El tercer nulo a  $4(\delta\phi_3/2) = 3\pi$ , de donde  $\delta\phi = 3\pi/2$ , figura 9.7.d. Si añadimos de nuevo  $\pi$ , tendremos  $4(\delta\phi_4/2) = 4\pi$ , con  $\delta\phi = 2\pi$  que anula también el denominador, dando un cociente de senos igual a 4.

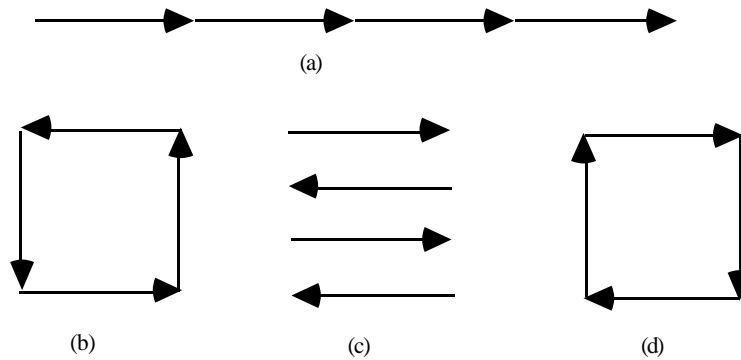


Fig. 9.7

El módulo queda representado en la figura 9.8.

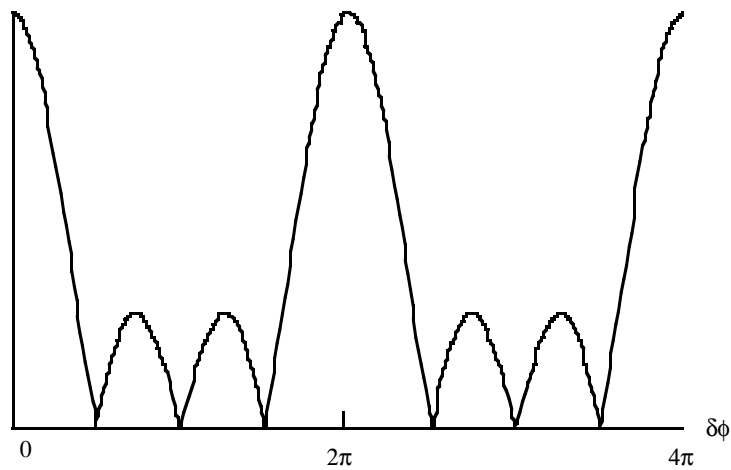


Fig. 9.8

#### 9.4 Superposición de $N$ ondas armónicas con distinta frecuencia

Si el desfase se produce por diferencia de frecuencias, entonces  $\delta\phi = \delta\omega \cdot t$  y en el caso de  $N$  ondas de frecuencias

$$\omega_1, \omega_1 + \delta\omega, \omega_1 + 2\delta\omega, \dots, \omega_1 + \Delta\omega = \omega_2$$

podemos aplicar la expresión general de la ecuación 9.8, para superponer las  $N$  ondas en  $x = 0$ , con  $\delta\phi = \delta\omega \cdot t$  y  $\Delta\omega = (N - 1)\delta\omega$

$$\Psi(0, t) = A \frac{\text{sen}(N\delta\omega \cdot t/2)}{\text{sen}(\delta\omega \cdot t/2)} \cos\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) t$$

como

$$\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2} = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \omega_p$$

tenemos

$$\Psi(0, t) = A \frac{\text{sen}(N\delta\omega \cdot t/2)}{\text{sen}(\delta\omega \cdot t/2)} \cos(\omega_p t) \quad (9.9)$$

### 9.5 Velocidades de fase y de grupo. Relación de dispersión

Acabamos de superponer ondas armónicas para constituir un paquete de ondas; para cada una de las ondas armónicas se ha definido la velocidad de fase de la onda como  $v = \omega/k$ ; si nos ceñimos a la superposición vista de dos ondas de frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , podemos definir la velocidad de fase de la onda resultante  $v_f = \omega_p/k_p$ ; también podemos considerar la velocidad de la envolvente que *viaja* como si fuera una onda de frecuencia angular  $\Delta\omega/2$  y número de onda  $\Delta k/2$ . Esta velocidad recibe el nombre de velocidad de grupo,  $v_g$ .

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

En general, un paquete de ondas estará generado por la superposición de un mayor número de ondas armónicas y la velocidad de grupo del paquete vendrá definida por

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega = \omega_p, k = k_p} \quad (9.10)$$

es decir por el valor que toma la derivada de la frecuencia respecto del número de onda en el valor medio de la frecuencia, o del número de onda. Para cada onda armónica de las que superponemos para formar el paquete se verifica que  $\omega = vk$ , substituyendo en la ecuación 9.10 y derivando

$$v_g = \left( \frac{d(vk)}{dk} \right)_{\omega = \omega_p, k = k_p} = v_f + k \left( \frac{dv}{dk} \right)_{k = k_p} \quad (9.11)$$

obviamente, si la velocidad de fase es independiente del número de onda, o lo que es lo mismo es independiente de la frecuencia, la última derivada de la 9.11 es nula y la velocidad de fase y la de grupo coinciden. Ambas situaciones se ilustran en las figuras 9.9. En la figura 9.9.a, se representa una relación lineal  $\omega = vk$  donde  $v$  es la pendiente de la recta, igual a la derivada  $d\omega/dk$  para cualquier frecuencia. En la figura 9.9.b, se representa una relación  $\omega = \omega(k)$ , la velocidad de grupo corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva  $\omega = \omega(k)$ , en  $k = k_p$ , obviamente diferente de la velocidad de fase; en este caso resulta una velocidad de grupo mayor que la de fase,  $\omega/k < v_g = d\omega/dk$ . La independencia, o no, depende del medio; anteriormente hemos visto tres casos de independencia: ondas en cuerdas flexibles, ondas acústicas en medios elásticos y ondas electromagnéticas en el vacío; en los tres las velocidades de fase obtenidas eran independientes de la frecuencia. Los medios en que se da esta independencia se denominan *medios sin dispersión* o *no dispersivos*. Por contra, hemos visto como ondas electromagnéticas propagándose en medios dieléctricos o conductores

presentaban dependencia,  $\omega(k)$ , de la frecuencia con el número de onda. Estos medios se denominan *dispersivos*, en ellos difieren, en general, las velocidades de fase y de grupo. La dependencia  $\omega(k)$  recibe el nombre de *relación de dispersión* del medio.

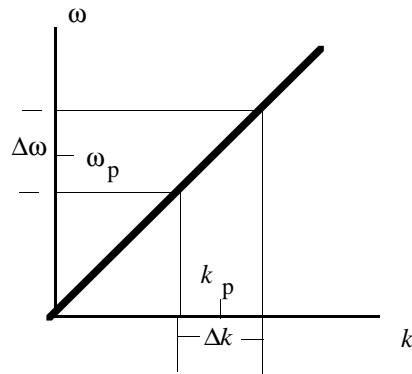


Fig. 9.9.a

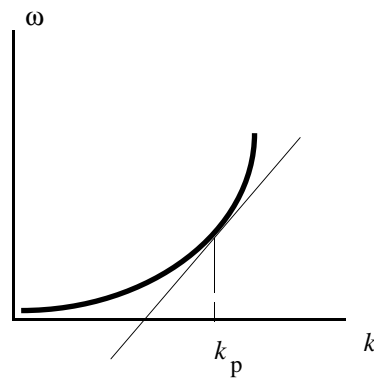


Fig. 9.9.b

Imaginémonos dos instantáneas sucesivas de un paquete de ondas; si el medio en que se propagan las ondas armónicas que imaginamos lo constituyen, es sin dispersión, las dos instantáneas serán idénticas salvo una traslación  $v_g \Delta t = v \Delta t$ . Si el medio es dispersivo, cada onda armónica puede tener una velocidad distinta de tal manera que la variación de las fases relativas hará que la superposición sea distinta, cambiando la forma del paquete, con el tiempo. Así el pulso rígido con el que iniciábamos el estudio del movimiento ondulatorio, sólo tiene sentido físico si sus componentes armónicas se mueven con la misma velocidad de fase, o lo que es lo mismo en un medio no dispersivo. En caso contrario el paquete perderá su rigidez, dispersándose, variando su forma al desplazarse, avanzando a la velocidad de grupo.

En medios dispersivos las velocidades de fase y de grupo pueden ser muy diferentes; además puede ser  $v_f < v_g$  o  $v_f > v_g$ . No se demuestra aquí pero es importante saber que la energía del paquete se propaga a la velocidad de grupo. En física cuántica las *partículas* se representan mediante paquetes de ondas y su velocidad es la de grupo del paquete.

## 9.6 Incertidumbre en la definición de un paquete de ondas

Para obtener un paquete de ondas, que podamos considerar aislado, hemos visto que se necesita superponer un número de ondas  $N$  muy grande en un ancho de banda  $\Delta\omega$  estrecho. Si observamos el paso del paquete en  $x = 0$  su expresión matemática vendrá dada por la ecuación 9.9. Como en el instante  $t = 0$  todas las ondas tienen fase nula y se superponen constructivamente dando la amplitud máxima

$$\Psi(0,0) = A(0) \equiv A N$$

como  $N \gg 1$ , podemos tomar  $\Delta\omega = (N - 1)\delta\omega \cong N \delta\omega$ , con lo que podemos escribir

$$A(t) = \frac{A(0)}{N} \frac{\text{sen}(\Delta\omega \cdot t/2)}{\text{sen}(\Delta\omega \cdot t/2N)}$$

como  $N$  es muy grande podemos substituir el seno del denominador por el arco y simplificando

$$A(t) = A(0) \frac{\text{sen}(\Delta\omega \cdot t/2)}{\Delta\omega \cdot t/2} \quad (9.12)$$

función cuya forma está representa en la figura 9.10. Los dos nulos de  $A(t)$  próximos al valor máximo

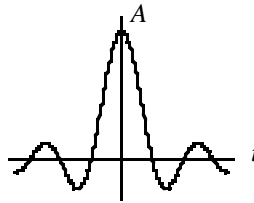


Fig. 9.10

corresponden a  $t = \pm 2\pi/\Delta\omega$ . El intervalo de tiempo entre estos dos nulos podemos asignarlo, *arbitrariamente*, como el de *duración*,  $\Delta t$ , del paquete para el observador situado en un punto ( $x = 0$ , en nuestro caso), así

$$\Delta t = 2 \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

que podemos escribir  $\Delta\omega \cdot \Delta t = 4\pi$ , o bien con una definición más laxa del paquete

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 4\pi \quad (9.13)$$

La expresión 9.13 establece que si superponemos ondas de frecuencias en un ancho de banda  $\Delta\omega$ , se genera un pulso cuya amplitud  $A(t)$  será apreciable durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Alternativamente, si un pulso tiene una duración apreciable de  $\Delta t$ , necesitaríamos superponer ondas con un ancho de banda  $\Delta\omega$  para representarlo; así, cuanto más breve sea el pulso mayor será el  $\Delta\omega$  necesario y viceversa. En el límite de una onda armónica,  $\Delta\omega = 0$ , su duración debería ser un tiempo infinito.

Un paquete de ondas de *longitud*  $\Delta x$ , pasará por un punto fijo, a la velocidad de grupo, en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  tal que

$$\Delta x = v_g \cdot \Delta t = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \cdot \Delta t$$

de donde  $\Delta k \cdot \Delta x = \Delta\omega \cdot \Delta t$ , o sea  $\Delta k \cdot \Delta x = 4\pi$ , o bien como antes

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 4\pi \quad (9.14)$$

Se podía haber escrito esta desigualdad directamente dada la dualidad existente entre  $\omega, t$ , y  $k, x$ . En sentido contrario, la reafirmamos mediante este razonamiento. En la desigualdad 9.14 observamos,



nuevamente, que si deseamos obtener un pulso bien localizado,  $\Delta x \rightarrow 0$ , necesitamos superponer un número muy elevado de ondas de distinta longitud de onda,  $\Delta k \rightarrow \infty$ .

### Ejercicio 9.1

Un altavoz se excita con dos osciladores armónicos a frecuencias ligeramente distintas  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , produciendo, simultáneamente, dos ondas sonoras cuyas presiones máximas son iguales ( $p_{01}=p_{02}=p_0$ ). Un micrófono, situado enfrente del altavoz, detecta una presión cuya variación temporal es la de la figura 9.11

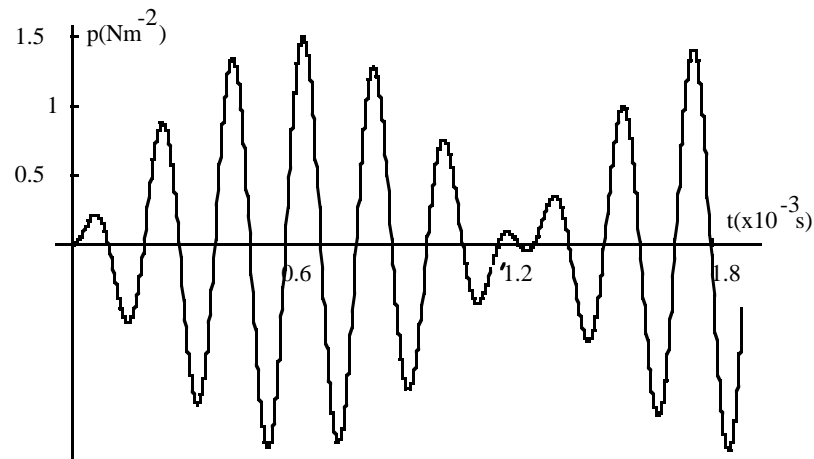


Fig. 9.11

- A partir de la gráfica escribir la ecuación analítica de la onda de presión y determinar  $p_0$ ,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .
- Determinar la potencia que incide sobre el micrófono si éste presenta una superficie de  $2,0 \text{ cm}^2$ , considerando que la velocidad de propagación de la onda es  $v = 341 \text{ m/s}$  y la densidad del aire es  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ .

**R :**

- a)  $0,75 \text{ N/m}^2$  ;  $3,4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$  ;  $2,9 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$  ; b)  $2,5 \cdot 10^{-7} \text{ W}$

### Ejemplo 9.1

En una cuerda ideal de longitud  $a = 1,0 \text{ m}$ , fija por sus dos extremos vibra una onda estacionaria de dos vientres, cuya energía total es  $E = 2,0 \text{ mJ}$ . Si la velocidad de las ondas progresivas en la cuerda es  $v_1 = 10^4 \text{ m/s}$ . Calcular:

- El período de vibración de la onda
- La densidad de energía media de la onda estacionaria sobre la cuerda, y la potencia media de cada una de las dos ondas progresivas de que consta.

Durante diez ciclos de oscilación se conecta directamente un extremo de la cuerda a una segunda, donde la velocidad de propagación de las ondas es de  $v_2 = 10^3 \text{ m/s}$ , extrayéndose así un tren de pulsos.

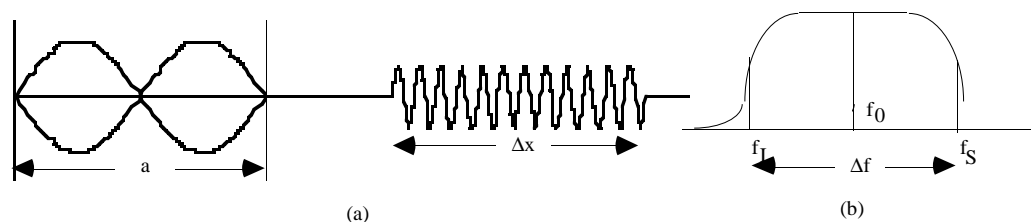


Fig. 9.11

- c) Si el coeficiente de reflexión de potencia durante la conexión vale  $R = 0,999$ , calcular el coeficiente de transmisión de potencia  $T$ , así como la energía  $\Delta E$  transmitida al tren.  
 d) Calcular la anchura espacial del tren  $\Delta x$ , fig 9.11.a. Se observa que el espectro en frecuencias es el de la figura 9.11.b: obtener los valores de su ancho de banda espectral  $\Delta f$ , así como las frecuencias superior  $f_S$  e inferior  $f_I$  del tren de pulsos.

### Solución

- a) Ya que hay dos vientres, la longitud de la cuerda corresponde a la longitud de onda,  $\lambda = a = 1\text{m}$ , así

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \text{ s}$$

- b) La densidad de energía media de la onda estacionaria es

$$\eta = \frac{E}{a} = 2,0 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-1}$$

Podemos imaginar la onda estacionaria como superposición de dos ondas progresivas a las que asociamos igual cantidad de energía así,

$$\eta_{\text{progresiva}} = \frac{\eta}{2} = \eta_p$$

La potencia media de cada una será

$$P = \eta_p v = 1\text{mJ}\cdot\text{m}^{-1}\cdot 10^4\text{ms}^{-1} = 10 \text{ Js}^{-1} = 10 \text{ W}$$

- c) Por conservación de la energía tenemos  $T + R = 1$ , con lo que

$$T = 1 - R = 0,001$$

Es decir un uno por mil de la potencia incidente es transmitida al segundo medio. Como la duración de diez ciclos es  $\Delta t = 10T = 10\cdot 10^{-4} = 10^{-3}\text{s}$ , la energía transmitida a la segunda cuerda es

$$\Delta E_t = T\Delta E_i = T(P\Delta t) = 0,001\cdot 10\cdot 10^{-3} = 10^{-5}\text{J}$$

d) Como la duración temporal del pulso es  $\Delta t = 10^{-3}$  s, la anchura espacial será  $\Delta x = v_2 \Delta t = 10^3 \cdot 10^{-3} = 1$  m. Al cambiar de medio la frecuencia de una onda no cambia, así la frecuencia central,  $f_0$ , del espectro de frecuencias del paquete corresponderá a la de la onda incidente  $f_0 = 1/T = 10^4 \text{ s}^{-1}$ . Por otra parte, la anchura temporal del paquete está relacionada con el ancho de banda espectral  $\Delta f$ , mediante

$$\Delta t \Delta f \approx 1$$

de donde  $\Delta f \approx 1/\Delta t = 10^3 \text{ s}^{-1}$ . De aquí las frecuencias pedidas serán

$$f_s = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 10^4 + \frac{10^3}{2} = 10.500 \text{ s}^{-1} \quad f_I = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 10^4 - \frac{10^3}{2} = 9.500 \text{ s}^{-1}$$

### Ejemplo 9.2

Un foco sonoro puntual emite ondas armónicas de frecuencia  $\omega$ , en el seno de un fluido donde el número de onda  $k$ , en función de la frecuencia  $\omega$ , viene dado por la gráfica de la figura 9.12.

a) Calcular la velocidad de fase de las ondas a las frecuencias de  $\omega_1 = 50 \text{ rad/s}$  y  $\omega_2 = 100 \text{ rad/s}$ .

El foco emite un tren de 10 ciclos, figura, cada uno de los cuales dura 6,3 ms y cuyo espectro de frecuencias viene dado por la figura. La potencia de emisión es de  $P_0 = 20 \text{ W}$ .

b) Razonar cual es el valor de la frecuencia central  $\omega_0$  del espectro y calcular su ancho de banda  $\Delta\omega$ .

c) Dar una expresión de la densidad de energía en función de la distancia  $r$  al foco.

### Solución

a) La velocidad de una onda armónica se puede expresar como  $v = \omega/k$ , que corresponde a la

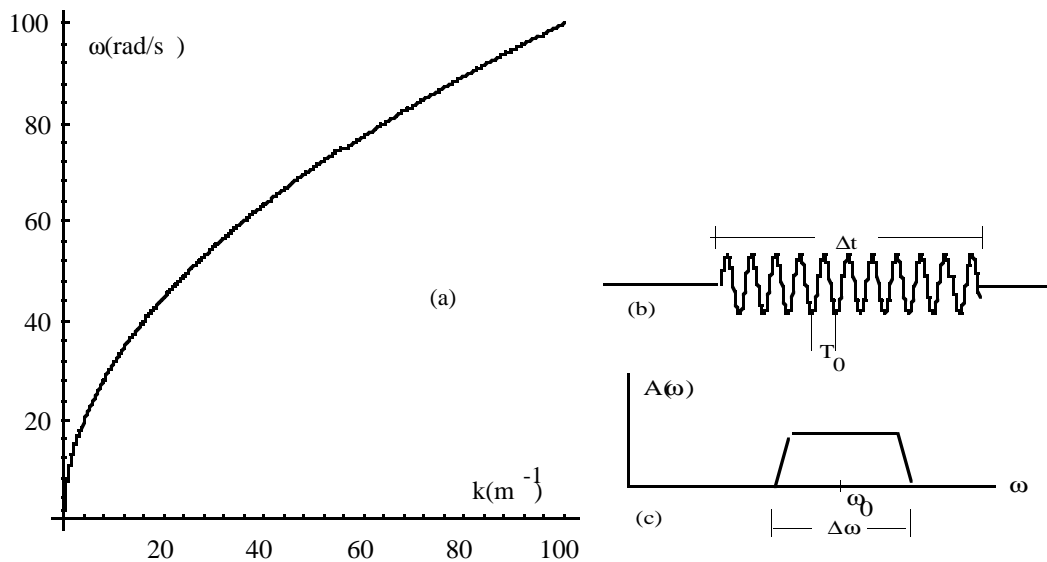


Fig. 9.12

velocidad de una fase de la onda, por ejemplo, un máximo. En la gráfica  $\omega(k)$  de la figura 9.12, podemos tomar los valores de  $k$ , correspondientes a las frecuencias dadas,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , obteniendo:

$$k_1 \approx 25 \text{ m}^{-1}, \quad k_2 \approx 100 \text{ m}^{-1}$$

y de ahí

$$v_{f1} = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{50}{25} = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_{f2} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{100}{100} = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Las dos ondas armónicas se propagan con velocidades diferentes y por lo tanto el medio es dispersivo, como se observa directamente en la gráfica  $\omega(k)$  dada su no linealidad. En un medio como éste, cada onda armónica de diferente longitud de onda, viaja a velocidad distinta, así un paquete (superposición de ondas armónicas progresivas) irá cambiando de forma conforme progresa. En este caso el pulso se propaga a la llamada velocidad de grupo, distinta de la velocidad de fase.

b) La frecuencia central será  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , donde  $T_0 = 6,3 \text{ ms}$  por lo tanto

$$\omega_0 = 2\pi/6,3 \cdot 10^{-3} \approx 10^3 \text{ s}^{-1}$$

la duración del pulso es aproximadamente  $\Delta t = 10T_0$  y como  $\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi$

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{10T_0} = 10^2 \text{ s}^{-1}$$

c) Considerando el medio como no absorbente, la energía del pulso se propagará por igual en todas las direcciones, de tal manera que la intensidad,  $I(r)$ , asociada al pulso a una distancia  $r$  del foco emisor será:

$$I(r) = \frac{P_0}{4\pi r^2}$$

por otra parte  $I = \eta v_g$  donde  $\eta$  es la densidad de energía y  $v_g$  la velocidad de grupo del paquete o velocidad con que se propaga la energía. Así

$$\eta = \frac{I}{v_g} = \frac{P_0}{4\pi r^2 v_g}$$

La velocidad de grupo del paquete se puede obtener de la curva de dispersión

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \approx \frac{100 - 50}{100} = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

de donde

$$\eta = \frac{20}{4\pi r^2 \cdot 0,5} = \frac{10}{\pi r^2} \text{ Jm}^{-3}$$

### Ejemplo 9.3

Una cuerda elástica lineal, que suponemos indefinida, tiene una masa por unidad de longitud de 10g/m y está sometida a una tensión de 40N. La figura 9.13 nos muestra una instantánea de la posición de la cuerda después de haberla hecho vibrar un cierto tiempo. Si  $d = 1,4\text{m}$  y  $D = 11,2\text{m}$ :

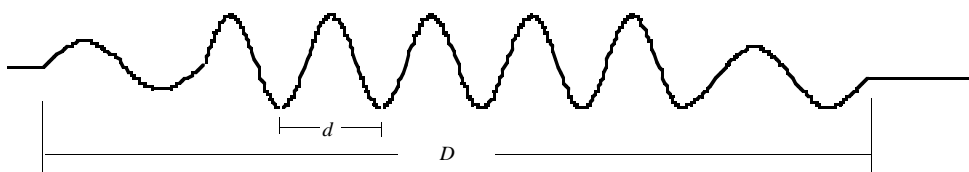


Fig. 9.13

- Calcular la velocidad de propagación de la onda en la cuerda.
- Calcular la longitud de onda, la frecuencia y el período de la oscilación dominante.
- ¿Durante cuánto tiempo se ha hecho vibrar la cuerda?
- ¿Cuál es la imprecisión en la frecuencia de esta onda?

### Solución

a) La velocidad de propagación depende exclusivamente de las características del medio, y en el caso de ondas transversales en una cuerda tiene el valor:  $v = \sqrt{T/\mu}$ , donde  $T$  es la tensión de la cuerda y  $\mu$  su densidad lineal. Como  $v$  es independiente de la frecuencia la cuerda es un medio sin dispersión: coinciden velocidad de fase y velocidad de grupo

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{40}{0,01}} = 63\text{ms}^{-1}$$

b) Si la onda fuese infinita podría ser una onda armónica, y su longitud de onda sería  $d$ . Al ser finita, podemos considerar al tren de ondas como superposición de varias ondas armónicas cuyas frecuencias son ligeramente mayores o menores que la de la onda infinita, cuya frecuencia, si bien no es la única, sigue siendo la de mayor importancia.

Por ello:

$$\lambda = d = 1,4 \text{ m}$$

la frecuencia correspondiente es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{63}{1,4} = 45\text{Hz}$$

y el período

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{45} = 0,022\text{s}$$

c) Si el tren de ondas tiene una longitud  $D$  y se propaga a velocidad  $v$ , tardará un tiempo  $\Delta t = D/v$  para pasar por un punto cualquier, tiempo durante el cual se ha producido la vibración

$$\Delta t = \frac{11,2}{63} = 0,18\text{s}$$

d) El número  $N$  de ondas del tren es  $D/d = 11,2/1,4 = 8$ , al que debemos atribuirle una imprecisión de  $\pm 1$  unidad, por lo que  $N = 8 \pm 1$ . Como la frecuencia se puede expresar en función del número total de ondas:  $f = 1/T = N/\Delta t$ , una imprecisión  $\Delta N = \pm 1$ , en  $N$  dará lugar a una imprecisión en  $f$ :

$$\Delta f = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{0,18} = 5,6\text{Hz}$$

Las frecuencias de las ondas armónicas que superpuestas constituyen este tren de ondas tienen valores comprendidos entre  $(45 - 5,6)\text{Hz}$  y  $(45 + 5,6)\text{Hz}$ .

---

## 10 Interferencia y difracción

### 10.1 Introducción

Varias ondas pueden incidir en un determinado lugar; en condiciones de linealidad, estas ondas no interactúan entre sí y cada una sigue su camino: el mismo que hubiera seguido de no existir las otras. Sin embargo un observador, situado en ese determinado lugar, observaría la superposición de las ondas en ese punto, su resultado es lo que llamaremos *interferencia*. Aunque la interferencia se produce sea cual sea la naturaleza de las ondas, presenta su mayor interés, y sencillez, cuando las ondas tienen la misma frecuencia.

Cuando un frente de ondas se ve cortado o interrumpido parcialmente por un obstáculo suceden cambios en la propagación de las ondas. El cálculo de cómo es la onda resultante de la interacción onda-obstáculo puede hacerse considerando cada punto del frente de onda como una fuente puntual, siguiendo el principio de Huygens, y calculando la interferencia que resulta de la emisión de todas estas fuentes. En general este cálculo puede ser inabordable, así que vamos a hacerlo en el caso más sencillo posible: *interrumpiendo* una onda armónica plana mediante una superficie plana, normal al vector de onda, que tenga una rendija de longitud muy grande respecto a la anchura  $a$ . Según la idea de Huygens cada punto de la rendija se convierte en un foco emisor, el nuevo frente de onda será la envuelta de todas las ondas emitidas en un instante. Podemos considerar que las ondas inciden en una *pantalla* situada a una distancia  $D$  tal que  $D \gg d$ , de forma que podamos considerar las ondas incidentes como ondas planas. Esta *interacción* entre una onda plana y un objeto, superficie plana con rendija, es una situación particular de las muchas que se pueden dar. Este fenómeno de interacción se conoce con el nombre de *difracción*. El patrón de interferencia que obtengamos sobre la pantalla será la consecuencia de la difracción de la onda por la rendija.

### 10.2 Interferencia de dos ondas: diagrama de fasores

El caso más simple de interferencia corresponde a la superposición, en un lugar, de dos ondas armónicas de igual amplitud y frecuencia; para su estudio supongamos un sistema, como el de la figura 10.1.a, constituido por dos fuentes puntuales,  $F_1$  y  $F_2$ , que emiten ondas como hemos indicado y en fase (podrían emitir con una diferencia de fase, siempre que fuera constante). Estudiaremos la superposición en un punto genérico del eje  $Oy$ , situado de tal manera que  $D \gg d$ . Consideremos una dirección de propagación que forma un ángulo  $\theta$  con  $O'O$ ; en la aproximación considerada, las dos ondas, emitidas desde  $F_1$  y  $F_2$ , llegarán al correspondiente punto del eje  $Oy$  con una diferencia de caminos  $\Delta r = d \sin \theta$ , figura 10.1.b. Como una diferencia de caminos de una longitud de onda corresponde a una diferencia de fase de  $2\pi$ , la diferencia de fase será

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta \quad (10.1)$$

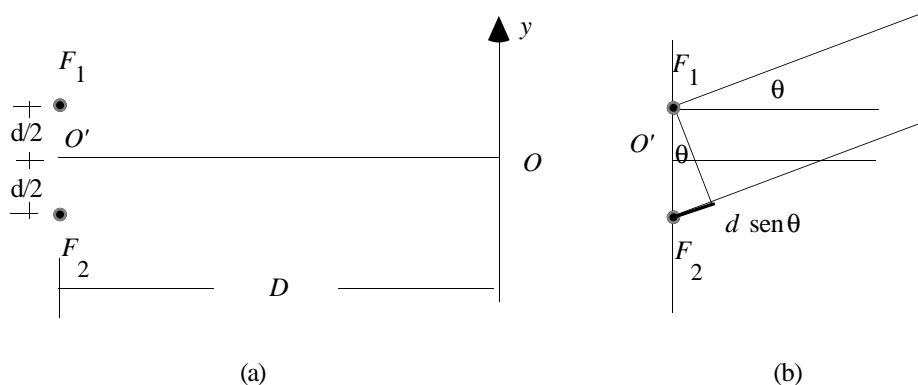


Fig. 10.1

Obviamente para  $\theta = 0$  no hay diferencia de fase y la superposición será constructiva. El siguiente ángulo,  $\theta_1$ , para el que habrá un máximo corresponde a una diferencia de fase de  $2\pi$ , es decir cuando  $\Delta r = \lambda = d \sin\theta_1$ ; se observa que si acercamos las dos fuentes se separan las posiciones de los máximos. Los sucesivos máximos se verifican para  $\delta\phi = 2\pi n$ , siendo  $n$  un número entero, o su equivalente

$$n\lambda = d \sin\theta_n$$

por lo que podemos decir que los senos de los ángulos para los que se producen máximos son múltiplos del seno del ángulo correspondiente al primero

$$\sin\theta_n = n \sin\theta_1 \quad (10.2)$$

Cuando la diferencia de fase sea  $(2n + 1)\pi$  las dos ondas llegarán en contrafase y su suma será nula; será cuando

$$(2n + 1) \frac{\lambda}{2} = d \sin\theta \quad (10.3)$$

Entre máximos y nulos habrá una variación continua de la amplitud resultante; para calcularla deben sumarse las amplitudes vectorialmente y para ello usaremos el llamado *diagrama de fasores*, que no contiene ninguna novedad especial salvo el nombre de fasor, ya que se reserva el de vector para el vector de onda  $\mathbf{k}$ . El diagrama de fasores resulta cómodo para sumar dos o más ondas armónicas cuyas diferencias de fase sean fijas. Para que ésto suceda con el tiempo, es necesario que las ondas a sumar tengan la misma frecuencia, por ello se trata de encontrar la suma

$$A \cos(\omega t + \phi_1) + B \cos(\omega t + \phi_2)$$



este cálculo ya se ha hecho al principio del capítulo anterior y ha quedado ilustrado en la figura 9.1. Ahora  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  es independiente del tiempo; es decir, al tener las dos ondas la misma frecuencia, la posición relativa de los vectores es la misma en cualquier instante. Todo el sistema girará en sentido antihorario y la componente  $x$  de cada vector representa la onda correspondiente. El procedimiento puede extenderse a la suma de  $n$  ondas armónicas, hasta sumar vectorialmente los  $n$  fasores.

Apliquemos este diagrama para estudiar la interferencia de las dos ondas en la *pantalla* situada en  $Oy$ . En  $O$  tendremos dos fasores de igual módulo, ya que se supone que ambas fuentes emiten con igual intensidad, y de la misma dirección ya que están en fase, figura 10.2.a; en un punto situado en  $y > 0$ , a

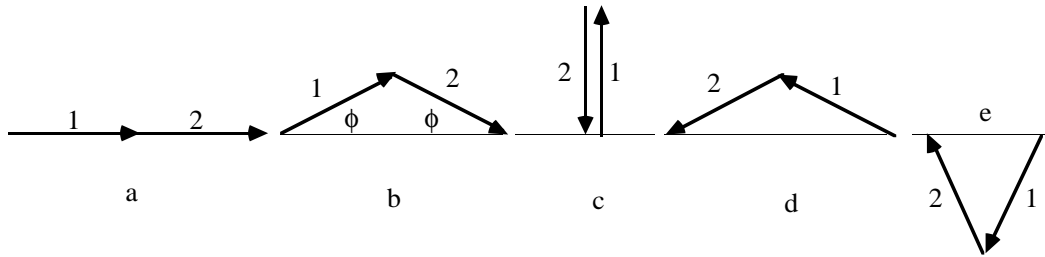


Fig. 10.2

corta distancia de  $O$ , el diagrama de fasores sería el de la figura 10.2.b, donde  $\phi$  representa la fase de adelanto o retraso de las ondas respecto a las que llegan a  $O$ ; su suma viene dada por la ecuación 9.1. Si el punto va alejándose de  $O$ , el diagrama de fasores irá tomando formas como la de la figura 10.2.c, de resultante nula, o las de las figuras 10.2.d y 10.2.e, hasta llegar de nuevo a una figura idéntica a la 10.2.a. En cada caso la amplitud de la onda resultante se obtiene del fesor suma obtenido mediante la construcción del lado que cierra el triángulo. La amplitud varía continuamente desde  $2A$

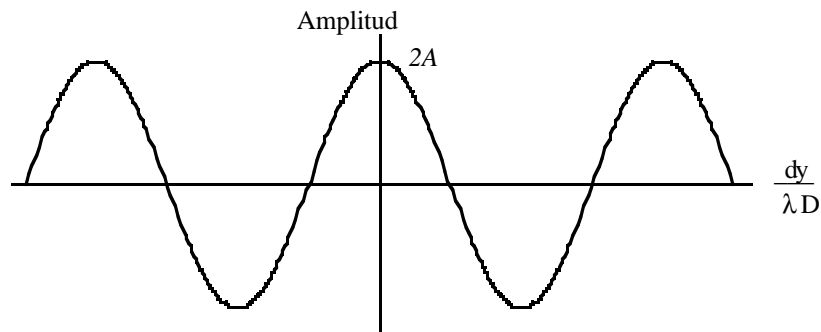


Fig. 10.3.a

hasta cero, dando una amplitud como la de la figura 10.3.a, donde se ha tomado como abcisa la magnitud normalizada  $dy/\lambda D$ , que surge de tomar la aproximación  $\sin\theta \cong \tan\theta = y/D$ ; aproximación posible ya que  $D \gg d$ , entonces

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta \cong 2\pi \frac{dy}{\lambda D} \quad (10.4)$$

y la amplitud resultante en función de  $y$

$$A(y) = 2A \cos \frac{\delta\phi}{2} = 2A \cos \pi \frac{dy}{\lambda D} \quad (10.5)$$

Una alternativa a lo anterior es aplicar directamente la fórmula general de superposición de  $N$  ondas, ecuación 9.8, para  $N = 2$ ; queda como ejercicio para el lector.

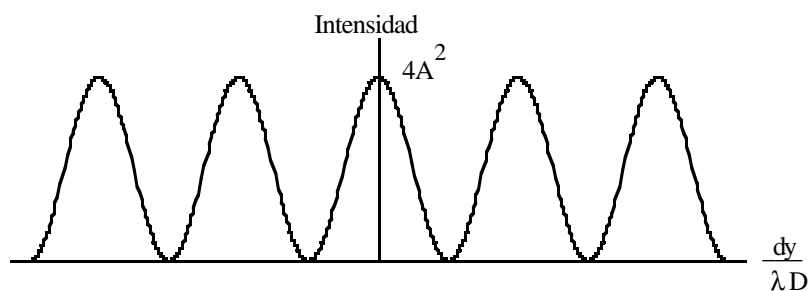


Fig. 10.3.b

Como la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, será proporcional a

$$I(y) \propto 4A^2 \cos^2 \pi \frac{dy}{\lambda D} \quad (10.6)$$

función que se representa en unidades arbitrarias en la figura 10.3.b.

Supongamos que en el dispositivo de la figura 10.1 añadimos una tercera fuente alineada con las otras dos y que emite en fase con ellas, separada también una distancia  $d$ , lo que significa que mantenemos constante  $\delta\phi$ , aumentando  $\Delta\phi$ . Aplicando la ecuación 9.8, para  $N = 3$  tenemos

$$A(y) = A \frac{\text{sen} 3\delta\phi/2}{\text{sen} \delta\phi/2} = A \frac{\text{sen} 3\pi \frac{dy}{\lambda D}}{\text{sen} \pi \frac{dy}{\lambda D}}$$

como el denominador es el mismo que con dos fuentes los nulos simultáneos de numerador y denominador siguen siendo los mismos y por lo tanto la condición de máximo sigue siendo  $d \text{sen} \theta = n\lambda$ ; no sucede así con los mínimos que cambiarán. Veámoslo con los diagramas de fasores, de los que mostramos una secuencia al ir aumentando  $\delta\phi$ , desde cero a  $2\pi$ , figura 10.4.

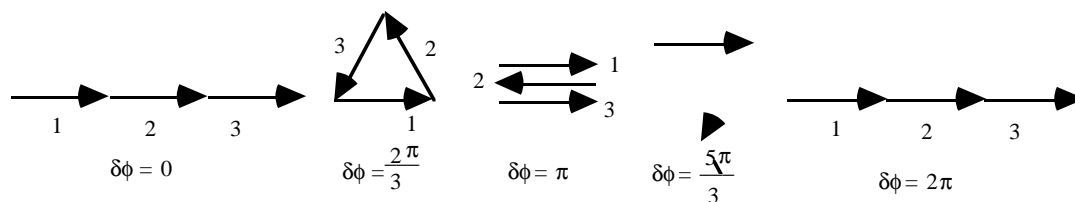


Fig. 10.4

En la figura 10.5 se muestra una gráfica de la  $A(y)$ , en trazo fino, y de la intensidad en trazo grueso; los valores de ambos están normalizados.

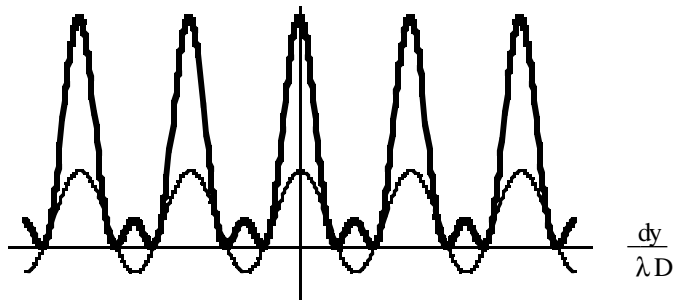


Fig. 10.5 . Diagramas de  $A(y)$ , trazo fino, y de intensidad, trazo grueso, para tres fuentes coherentes igualmente espaciadas.

### Ejercicio 10.1

Una onda armónica unidimensional de amplitud  $A$ , frecuencia  $\omega$  y número de onda  $k$ , se propaga en el sentido positivo de las  $x$ , en un medio que se extiende desde  $x = -\infty$  a  $x = 0$ . Como consecuencia del cambio de medio, sufre una reflexión tal que la onda reflejada, en  $x < 0$ , tiene una amplitud  $r_{12}A = -0,20A$ .

a.1) Escribir una función que represente la onda incidente  $\phi_i$ . Idem, las ondas reflejada  $\phi_r$  y transmitida  $\phi_t$

a.2) ¿Cuál es la relación de impedancias  $Z_2/Z_1$ , de los dos medios ( $Z_1 =$  impedancia del medio situado en  $x < 0$ )?

a.3) ¿Qué proporción de la energía incidente es transmitida al medio 2?

a.4) Si la onda fuera del medio dos hacia el uno, contestar de nuevo a las preguntas a.1 y a.3.

Se coloca, ahora, una capa delgada de un tercer medio entre  $x = 0$  y  $x = a$  de impedancia  $Z_0$  intermedia entre las dos anteriores.

b) ¿Se transmite más o menos intensidad de 1 a 3 que antes de 1 a 2?

El objetivo perseguido con la colocación de esta capa es disminuir al máximo la reflexión. Para ello intentamos que la interferencia entre las ondas reflejadas en  $x = 0$  y  $x = a$  sea destructiva. En una aproximación se podría suponer que para el cálculo de la amplitud de una onda transmitida el coeficiente de transmisión se tome igual a la unidad. Con esta aproximación y para el objetivo perseguido.

c.1) ¿Qué relación deben guardar  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$ ?

c.2) ¿Qué valor deberá tener  $a$  en función de  $\lambda$ ?

**R:**

a.1)  $\phi_i = A \cos(\omega t - kx)$ ,  $\phi_r = -0,20A \cos(\omega t + kx)$ ,  $\phi_t = 0,80A \cos(\omega t - k'x)$ ; a.2)  $Z_2/Z_1 = 1,5$

a.3) 96%; b)  $T_{13} > T_{12}$ ; c.1)  $Z_3 = \sqrt{Z_1 Z_2}$  c.2)  $a = \lambda/4$

### 10.3 Interferencia de ondas procedentes de $N$ fuentes igualmente espaciadas

Supongamos que disponemos  $N$  fuentes alineadas emitiendo en fase, separadas también una distancia  $d$ , lo que significa que mantenemos constante  $\delta\phi$ , aumentando  $\Delta\phi$ , respecto a los casos vistos de dos y tres fuentes. Teniendo en cuenta la ecuación 9.8, la intensidad será de la forma

$$I = I_0 \left[ \frac{\text{sen} N\delta\phi/2}{\text{sen}\delta\phi/2} \right]^2 \quad (10.7)$$

donde  $I_0$  es la intensidad de cada fuente. La ecuación 10.7 indica máximos de intensidad  $N^2 I_0$  para  $\delta\phi = 2\pi n$ , siendo  $n$  un número entero, o su equivalente

$$n\lambda = d \text{sen}\theta_n$$

igual expresión que la obtenida para dos o tres fuentes. La intensidad es nula para  $N\delta\phi/2 = m\pi$  o bien

$$d \text{sen}\theta_m = \frac{m}{N} \lambda$$

donde  $m$  es un número entero, excluyendo los valores  $0, N, 2N, \dots$  que corresponden a los máximos. Entre dos mínimos debe haber un máximo, por lo que entre dos de los máximos principales hay  $N - 2$  máximos secundarios; sus amplitudes son relativamente más pequeñas cuanto mayor sea  $N$ . En la figura 10.6.a se muestra un gráfico normalizado de intensidades para  $N = 8$  donde pueden apreciarse los seis máximos secundarios entre dos principales y su tamaño relativo. En la figura 10.6.b se muestra un gráfico idealizado de intensidades para  $N$  muy grande. Todo ello sirve para mostrar que al aumentar el número de fuentes, la intensidad de la onda resultante toma valores importantes sólo para bandas estrechas de valores de  $\theta$ . Este resultado puede aprovecharse si se desea emitir ondas preferentemente en determinadas direcciones. Si en el caso de las ocho fuentes las tomamos separadas entre sí una distancia de media longitud de onda,  $d = \lambda/2$ , la condición de máximo será  $2n = \text{sen}\theta_n$  que indica que sólo hay el máximo correspondiente a  $n = 0$ , que corresponde a  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ ; las direcciones de intensidad nula corresponden a  $4 \text{sen}\theta_m = m$ , con  $m = 1, 2, \text{ y } 3$ .

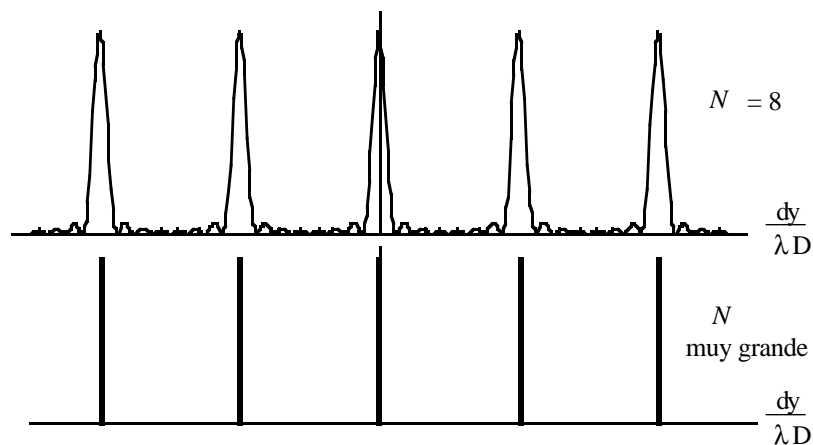


Fig. 10.6

### 10.4 Difracción por una rendija

Para hacer el cálculo propuesto volvamos al caso de dos fuentes coherentes separadas una distancia  $d$ . Intercalamos  $N - 2$  fuentes idénticas que las anteriores de tal manera que formen una fuente lineal, que podamos considerar continua, para lo que es necesario que  $N$  sea un número muy grande. Para obtener la amplitud  $A(\theta)$ , emplearemos la fórmula general de superposición de  $N$  ondas, ecuación 9.8; llamando  $A(0) = AN$  a la amplitud máxima, correspondiente a  $\theta = 0$ , tenemos

$$A(\theta) = \frac{A(0)}{N} \frac{\text{sen}(N\delta\phi/2)}{\text{sen}(\delta\phi/2)} \quad (10.8)$$

como  $N \rightarrow \infty$ , la diferencia de fase entre las ondas de dos fuentes consecutivas será tal que  $\delta\phi \rightarrow 0$ , por lo que podemos hacer

$$N \text{sen} \frac{\delta\phi}{2} \approx N \frac{\delta\phi}{2} \approx \frac{\Delta\phi}{2}$$

donde  $\Delta\phi$  es la diferencia de fase entre las dos ondas emitidas por las fuentes separadas la distancia  $d$

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{sen} \theta$$

Haciendo también  $N \delta\phi \approx \Delta\phi$  en el argumento del numerador de la ecuación 10.8, tenemos

$$A(\theta) = A(0) \frac{\text{sen}(\Delta\phi/2)}{\Delta\phi/2} = A(0) \frac{\text{sen} \frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda}}{\frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda}} \quad (10.9)$$

que es la amplitud de la onda emitida por la fuente lineal, tal como se recibe en los puntos de la *pantalla*. La función obtenida, del tipo  $(\text{sen} \alpha)/\alpha$ , es una función matemática importante que podemos

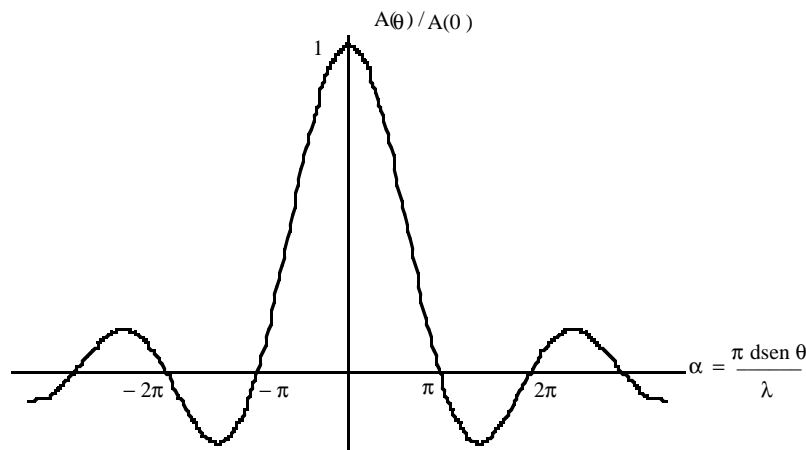


Fig. 10.7

denominar  $\text{senc } \alpha$  y está representada en la figura 10.7. Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la función  $\text{senc}^2 \alpha$ , de la figura 10.8 representará la gráfica de la intensidad normalizada

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left( \frac{\text{sen}(\Delta\phi/2)}{\Delta\phi/2} \right)^2 = \left( \frac{\text{sen} \frac{\pi d \text{sen } \theta}{\lambda}}{\frac{\pi d \text{sen } \theta}{\lambda}} \right)^2 \quad (10.10)$$

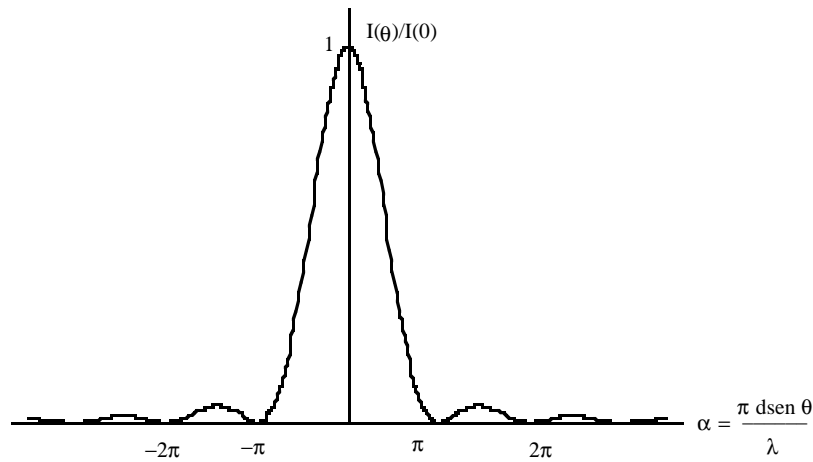


Fig. 10.8

Podemos construir el diagrama de fasores para la fuente lineal coherente extendiendo las ideas anteriores. En la figura 10.9.a se ha representado un diagrama de fasores para  $N = 4$ , el ángulo entre fasores es  $\delta\phi$  y los cuatro tienen la misma longitud, el ángulo entre el primer fador y el último es  $\Delta\phi$ .

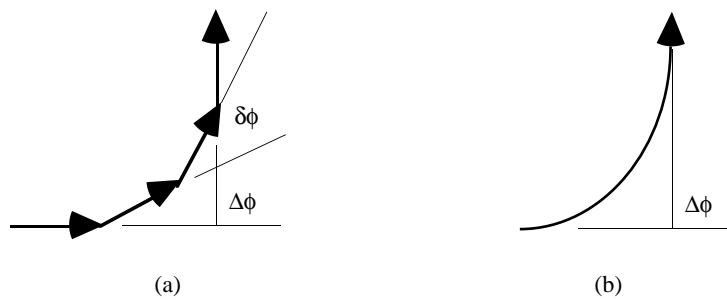


Fig. 10.9

Si el número de fuentes se hace infinito, manteniendo  $\Delta\phi$ , en lugar de un polígono de cuatro lados tendremos uno de infinitos lados, es decir un arco de circunferencia, figura 10.9.b; la longitud de

dicho arco es la misma para cualquier  $\theta$  ya que es la suma de las amplitudes de los fasores individuales. Podemos imaginarla constituida por una banda metálica flexible; en el eje del sistema,  $\theta=0$ , tenemos  $\Delta\phi = 0$ , el diagrama de fasores es una línea recta: la banda metálica está sin flexionar; al aumentar  $\theta$  y por lo tanto  $\Delta\phi$ , la cinta metálica adopta forma de arco de circunferencia, el primer nulo se obtendrá cuando adopte la forma de una circunferencia; las ondas emitidas por los extremos de la fuente lineal están en fase. Es decir, la condición de primer mínimo será

$$\Delta\phi = 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d\text{sen}\theta_1$$

de donde  $d\text{sen}\theta_1 = \lambda$ . Cuando  $\Delta\phi = 4\pi$ , el diagrama vuelve a ser cerrado tomando la forma de dos circunferencias completas; corresponde al segundo mínimo. En general, se presentará un valor nulo de la amplitud siempre que  $\Delta\phi = 2\pi n$ , siendo  $n = 1, 2, 3, \dots$  que corresponde a valores de  $\theta$  tales que

$$\text{sen}\theta_n = \frac{\lambda}{d} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.11)$$

Entre estos nulos se encuentran los máximos relativos más débiles; se presentan, *aproximadamente*, cuando los diagramas de fasores corresponden a una circunferencia y media, dos y media, tres y media, etc. El primer máximo relativo correspondería aproximadamente a una amplitud  $A_1$  tal que

$$A(0) = \pi A_1 + \frac{\pi A_1}{2}$$

de donde

$$A_1 = \frac{2}{3\pi} A(0) = 0,212 A(0)$$

Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud tenemos

$$I_1 = (0,212)^2 I(0) = 0,045 I(0)$$

Retomamos la ecuación 10.10 que define  $I(\theta)$ ; observamos que hay simetría respecto al eje definido por la fuente lineal por lo que esta expresión es válida para  $\theta$  medido en cualquier plano que contenga a la fuente lineal. Si  $d \gg \lambda$ , la intensidad disminuye muy rápidamente al desviarse  $\theta$  de cero, ya que  $\alpha$  se hace muy grande; la fase de la fuente lineal corresponde, en el punto  $O$  de intersección de la dirección  $\theta=0$  con la pantalla, a la de la fuente puntual localizada en el centro de la lineal pasando por su centro. En el otro extremo, si  $\lambda \gg d$ , entonces  $\text{sen}\alpha \approx \alpha$  y  $I(\theta) \approx I(0)$ : la emisión es independiente de  $\theta$  y la fuente lineal es semejante a una puntual.

Estudiada la fuente lineal podemos pasar al estudio de la difracción por una rendija; entendemos por rendija una abertura rectangular con un ancho  $a$  del orden de los  $10^2\lambda$  y una longitud del orden de  $10^2a = 10^4\lambda$ , figura 10.10.a. Podemos imaginar la rendija formada por tiras según  $y$  de espesor  $dz$ ; cada una de ellas constituye una fuente lineal coherente larga y podemos sustituirla por una fuente puntual en el eje  $z$ . Con ello el problema se reduce al de encontrar la amplitud de la onda en el plano  $xz$  debida a una fuente lineal que se extiende a lo largo del eje  $z$  en todo el ancho de la rendija, figura 10.10.b, que ya hemos resuelto. La correspondiente intensidad será

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left( \frac{\text{sen}\beta}{\beta} \right)^2 \quad (10.12)$$

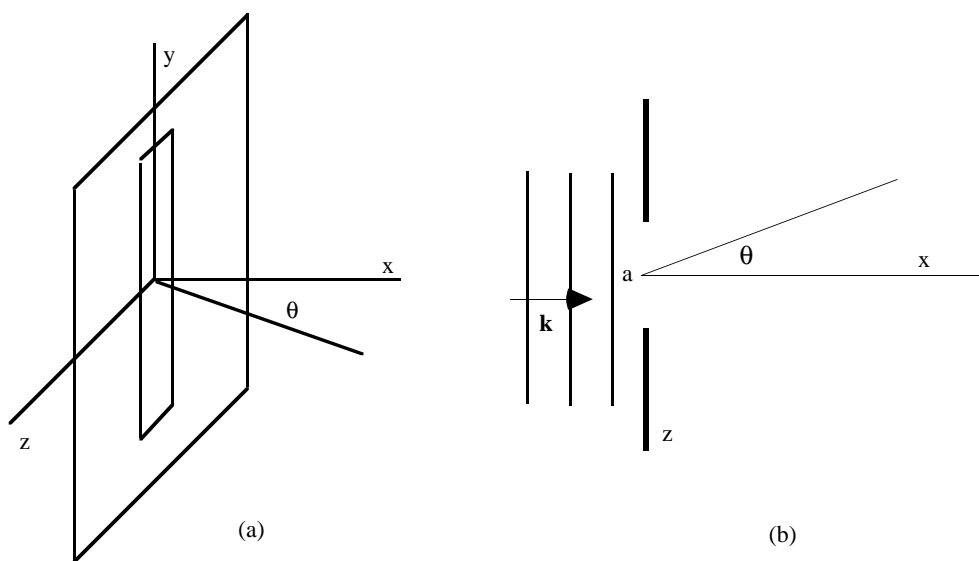


Fig. 10.10

donde  $\beta = \pi(a/\lambda)\sin\theta$ , con  $\theta$  medido a partir del eje  $x$  en el plano  $xz$ . En este caso  $\beta$  no es muy grande ya que la fuente lineal equivalente tiene una longitud  $a$  que no es grande, por lo que aunque la intensidad disminuye rápidamente con  $\theta$ , se pueden observar máximos relativos, aparte del central. La distribución de intensidad es la misma que se ha representado en la figura 10.8 substituyendo  $\alpha$  por  $\beta$ .

### Ejemplo 10.1

Dos generadores de microondas emiten en fase ondas de 3,0 cm de longitud de onda, según la disposición indicada en la figura 10.11.

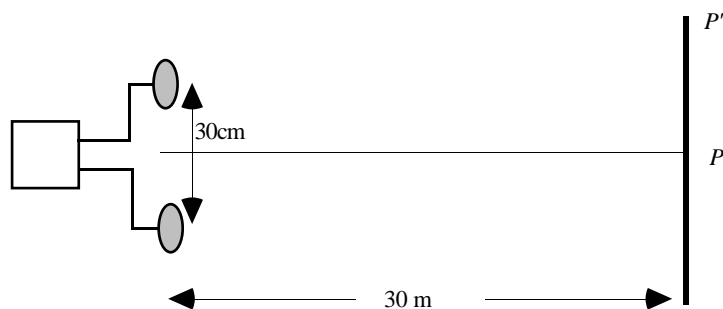


Fig. 10.11

- Describir, cualitativamente, la intensidad de radiación que indicaría un aparato que se desplazase de  $P$  a  $P'$ .
- Hallar, aproximadamente, las distancias entre  $O$  y el primer y segundo mínimos.



Si los generadores emitiesen ondas de 6,0 cm de longitud de onda,

c) ¿Variarían las distancias calculadas en b)?

d) ¿Y si se redujese la distancia entre emisores de 30 cm a 15 cm?

### Solución

a) En un punto genérico, entre P y P', se superpondrán las dos ondas emitidas por los generadores. Como los caminos recorridos por ambas no son iguales llegarán con una diferencia de fase, de tal manera que la intensidad resultante, que es proporcional al cuadrado de la amplitud, irá variando desde un valor máximo en P, ondas en fase, hasta anularse cuando las ondas incidan en oposición de fase. En general, si la diferencia de caminos es un múltiplo entero de la longitud de onda, el aparato marcará un máximo relativo y marcará cero si es múltiplo impar de la semilongitud de onda.

b) El sistema de este ejercicio es análogo al de la figura 10.1 que hemos estudiado. Como en este caso  $D = 30\text{m}$  y  $d = 0,3\text{m}$ , podemos considerar buena la aproximación que permite escribir la diferencia de fase mediante la ecuación 10.4. La condición de mínimo vendrá dada por

$$\Delta r = \frac{yd}{D} = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

para el primer mínimo,  $n = 0$ , de donde

$$y_1 = \frac{D\lambda}{2d} = \frac{30,0,03}{0,3,2} = 1,5 \text{ m}$$

para el segundo mínimo,  $n = 1$ ,

$$y_2 = 3 \frac{D\lambda}{2d} = 3 \frac{30,0,03}{0,3,2} = 4,5 \text{ m}$$

c) Para  $\lambda' = 2\lambda$ , evidentemente  $y'_1 = 2y_1$ , así  $y'_1 = 3\text{m}$  y  $y'_2 = 9\text{m}$ .

d) Para  $d' = d/2$  se tiene, también,  $y''_1 = 2y_1 = y'_1$

### Ejercicio 10.2

Luz verde coherente de longitud de onda  $5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  incide sobre una pantalla opaca con dos rendijas separadas una distancia de  $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Supongamos que las dos rendijas se convierten en dos focos puntuales coherentes cuya emisión incide sobre una pantalla situada a 1 m de la anterior donde se forman las figuras de interferencia.

a) Hallar las distancias entre el máximo central y los dos máximos próximos.

b) Repetir el cálculo anterior si la luz es roja de longitud de onda  $6,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ .

c) Repetir el cálculo del primer apartado, si lo que varía ahora es la separación entre las rendijas, que pasa a ser de  $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

**R:**

a)  $y_1 = 2,2\text{mm}$ ,  $y_2 = 4,4\text{mm}$ ; b)  $y_1 = 2,5\text{mm}$ ,  $y_2 = 4,9\text{mm}$ ; c)  $y_1 = 0,27\text{mm}$ ,  $y_2 = 0,55\text{mm}$ ;

**Ejemplo 10.2**

Dos ondas de frecuencia 1000 Hz e intensidades 1,6 y 0,90 W/m<sup>2</sup>, respectivamente, se superponen en un punto.

a) ¿Cual será la intensidad de la onda resultante si interfieren positivamente?

b) ¿Cuál será la intensidad si interfieren destructivamente?

Si la primera onda tiene una frecuencia de 1000 Hz y la segunda de 1001 Hz:

c) ¿Cómo será la intensidad de la onda resultante?

**Solución**

a) La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud,  $I = \alpha A^2$ ; y como la onda resultante tiene por amplitud la suma de amplitudes, ya que interfieren positivamente, su intensidad será

$$I_R = \alpha(A_1 + A_2)^2 = \alpha(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} = 1,6 + 0,9 + 2\sqrt{1,6 \cdot 0,9} = 4,9 \text{ W/m}^2$$

b) En este caso la amplitud de la onda resultante será la diferencia, así

$$I_R = \alpha(A_1 - A_2)^2 = \alpha(A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2} = 1,6 + 0,9 - 2\sqrt{1,6 \cdot 0,9} = 0,1 \text{ W/m}^2$$

c) Como la frecuencia de las dos ondas es diferente, la diferencia de fase entre ambas en el punto de interferencia es una función del tiempo  $\Delta\phi = \Delta\omega t$ , la amplitud de la onda resultante viene dada por la ecuación 9.2 y resulta una función periódica del tiempo que varía con una frecuencia de  $(1001 - 1000)/2 = 0,5$  Hz

$$C = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 0,5t}$$

la intensidad será

$$I_R = \alpha C^2 = \alpha(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 0,5t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos 0,5t$$

Sus valores extremos corresponden a los calculados en a) y b), es decir: la intensidad de la onda resultante en cada punto del espacio oscilará entre 4,9 W/m<sup>2</sup> y 0,1 W/m<sup>2</sup> con una frecuencia de 0,5 Hz.

**Ejemplo 10.3**

Un generador,  $G_1$ , emite una onda electromagnética, de longitud de onda  $\lambda = 300$  mm, que consideraremos plana. La potencia por unidad de área es 100 W/m<sup>2</sup> en el instante que alcanza el valor máximo.

a) Determinar el valor máximo del módulo del campo eléctrico.

b) Escribir una función de onda del campo eléctrico, considerando el generador en el origen.

En la dirección de propagación de la onda se sitúa otro generador,  $G_2$ , idéntico al anterior, que emite en fase con  $G_1$ , y en la misma dirección.

c) ¿A qué distancia deben situarse ambos generadores para que no se detecte campo eléctrico fuera del intervalo comprendido entre  $G_1$  y  $G_2$ ? ¿Es única la solución?

d) En las condiciones del apartado anterior, ¿qué tipo de onda resultará entre  $G_1$  y  $G_2$ ?

**Solución**

a) La potencia por unidad de área o intensidad de una onda es igual al producto de la velocidad de la onda por la densidad de energía, en este caso,  $I = c\eta$ . La densidad de energía asociada a la onda será suma de la asociada al campo eléctrico más la asociada al campo magnético. Por ser ambas iguales,

$$\eta = \eta_E + \eta_B = 2\eta_E = 2\varepsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

y por lo tanto

$$I = c\varepsilon_0 E^2$$

de donde para los valores máximos

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{100.36\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}} = 194 \text{ V/m}$$

b) Una posible función de onda del campo eléctrico sería una de la forma

$$E = E_{\max} \cos(kx \pm \omega t)$$

donde

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0,3 = 20,9 \text{ m}^{-1} \quad \text{y} \quad \omega = kc = 2\pi \cdot 10^9 = 6,28 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

La función correspondiente al signo menos representaría la onda que viaja en el sentido positivo de las  $x$ ; la del signo más la que lo hace en el negativo.

c) Tanto a la derecha como a la izquierda de ambos generadores se superponen dos ondas de igual amplitud y frecuencia y que viajan en el mismo sentido. Para que la interferencia sea destructiva es necesario que la distancia que separa los generadores produzca una diferencia de fase  $\pi + 2\pi n$ . Así, si representamos por  $a$  la separación entre  $G_1$  y  $G_2$  deberá cumplirse

$$ka = \pi(1 + 2n)$$

de donde

$$a = \frac{(1 + 2n)\pi}{k} = \frac{(1 + 2n)\lambda}{2} = (1 + 2n) 0,15 \text{ m}$$

donde  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$  no siendo, pues, única la solución.

d) Entre ambos generadores se superpondrán las dos ondas viajando en sentido opuesto, originándose una onda estacionaria. Se puede comprobar analíticamente.

$$E = E_{\max} \cos(kx - \omega t) + E_{\max} \cos(kx' + \omega t)$$

donde  $x' = x - a$ ; tomando el menor valor de  $a$ ,  $x' = x - \pi/k$

$$E = E_{\max} [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t - \pi)] = 2E_{\max} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t$$

en donde comprobamos que la función de onda resultante se puede escribir como producto de dos, una que depende sólo de la posición por otra que depende sólo del tiempo, característica de una onda estacionaria.

---